

Relativiteit (deel 1)

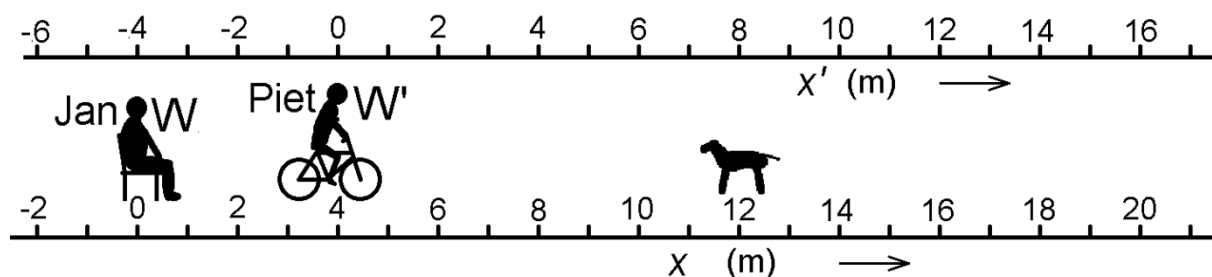
- § 1 Waarnemers, tijd-plaats-diagrammen
- § 2 Galileï-transformatie
- § 3 Postulaten van de speciale relativiteitstheorie
- § 4 Tijdsduurrek
- § 5 Lengtekrimp
- § 6 Minkowskidiagram deel 1
- § 7 Minkowskidiagram deel 2
- § 8 Lorentztransformatie
- § 9 Ruimtetijdinterval
- § 10 Snelheden relativistisch optellen

Bijlagen

§ 1 Waarnemers, tijd-plaats-diagrammen

Waarnemers, inertiaalstelsel

In de onderstaande figuren zit Jan op een stoel en fietst Piet langs Jan met een constante snelheid naar rechts. Jan en Piet zijn allebei zogenoemde 'waarnemers'. We noemen Jan waarnemer W en Piet waarnemer W' (spreek uit: W-accents). Beide waarnemers hebben een eigen plaatsas waarmee ze de plaats van voorwerpen kunnen aangegeven. Voor Jan is dat de x-as en voor Piet is dat de x'-as (spreek uit: x-accents-as). Jan zit in de oorsprong van zijn plaatsas ($x = 0$ m) en Piet zit in de oorsprong van zijn plaatsas ($x' = 0$). Het is belangrijk om te beseffen dat de x-as als het ware vastzit aan Jan en de x'-as vastzit aan Piet. Als Piet dus naar rechts rijdt, neemt hij zijn plaatsas mee. In de figuur die de situatie op een bepaald tijdstip voorstelt, bevindt de hond zich voor W (Jan) op $x = 12$ m en voor W' (Piet) op $x' = 8$ m.



In deze paragraaf is de tijd voor beide waarnemers gelijk. In de volgende paragrafen blijkt het echter nodig te zijn om onderscheid te maken tussen de tijd t voor W en de tijd t' voor W'. Dat is met name belangrijk als de onderlinge snelheid tussen W en W' erg groot is. Om goed voorbereid te zijn op de volgende paragrafen, maken we nu alvast dat onderscheid (terwijl hier eigenlijk nog geldt: $t = t'$).

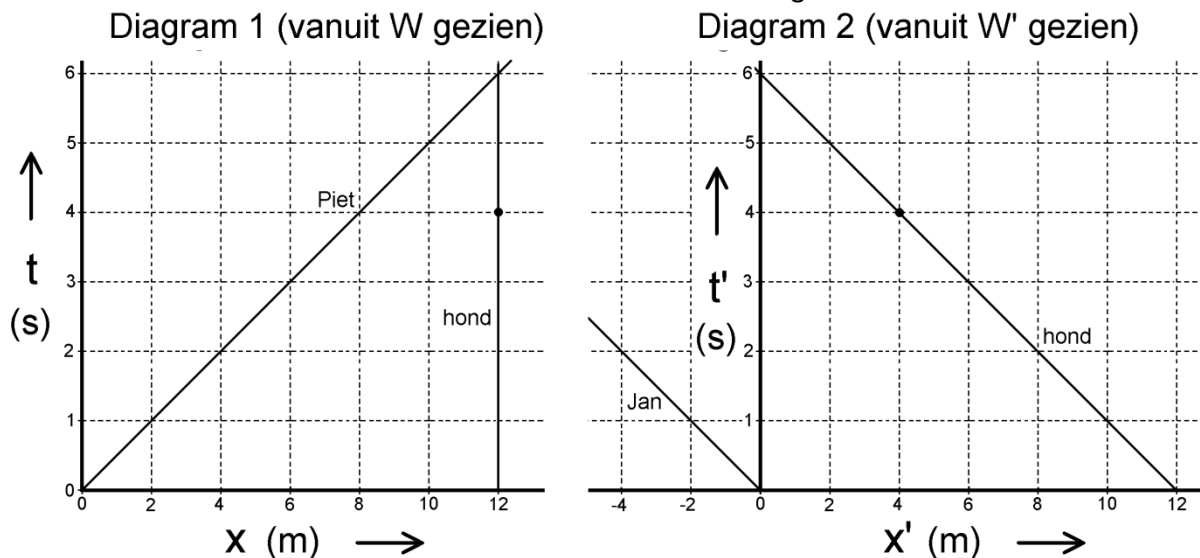
Vaak gebruikt men niet het woord 'plaatsas' maar 'referentiestelsel' voor de plaatsaanduiding van voorwerpen. Zo hebben W en W' hun eigen referentiestelsel. In gevallen waarbij een waarnemer niet versnelt, vertraagt of roteert, gebruiken we ook wel het woord 'inertiaalstelsel'. Dit geldt hierboven dus ook voor W en W' als we tenminste afzien van de draaiing van de aarde. In elk inertiaalstelsel geldt de eerste wet van Newton. Deze wet zegt dat, als de resulterende (= netto) kracht op een voorwerp nul is, de snelheid van dat voorwerp constant is in grootte en in richting. In deze en de volgende paragrafen beperken we ons tot inertiaalstelsels.

Stel dat een waarnemer in een trein zit en een voetbal op de vloer van het gangpad legt. Zolang de trein stil staat of met een constante snelheid rijdt, blijft de bal op zijn plaats liggen en geldt de eerste wet van Newton. De trein is dan een inertiaalstelsel. Echter, als de trein optrekt, zal de bal vanuit zichzelf naar achteren gaan rollen en is de trein geen inertiaalstelsel.

Tijd-plaats-diagram

In een tijd-plaats-diagram wordt het verband tussen tijd en plaats van iets of iemand weergegeven vanuit het gezichtspunt van een bepaalde waarnemer. Zie de twee onderstaande diagrammen. Diagram 1 geeft dit verband voor Piet en de hond vanuit waarnemer W (= Jan) bekeken. Diagram 2 geeft dit verband voor Jan en de hond vanuit waarnemer W' (= Piet) bekeken. In tegenstelling tot wat gebruikelijk is in de natuurkunde, wordt de tijdas hier verticaal getekend. Dat heeft geen diepere betekenis en is meer een kwestie van gewoonte bij de relativiteitstheorie. Merk op dat in diagram 1 langs de assen tijd t en plaats x staan en in diagram 2 tijd t' en plaats x' (met accenten dus).

In de diagrammen zijn we er vanuit gegaan dat de snelheid van Piet ten opzichte van Jan 2 m/s bedraagt en dat ze elkaar passeren op tijdstip nul. Verder is aangenomen dat de hond stilstaat op de weg. Voor waarnemer W is dat op plaats $x = 12$ m. Vanuit waarnemer W' bekeken hebben Jan en de hond een negatieve snelheid van -2 m/s.



Gebeurtenis en wereldlijn

We introduceren nu de volgende twee begrippen die belangrijk zijn in de relativiteitstheorie.

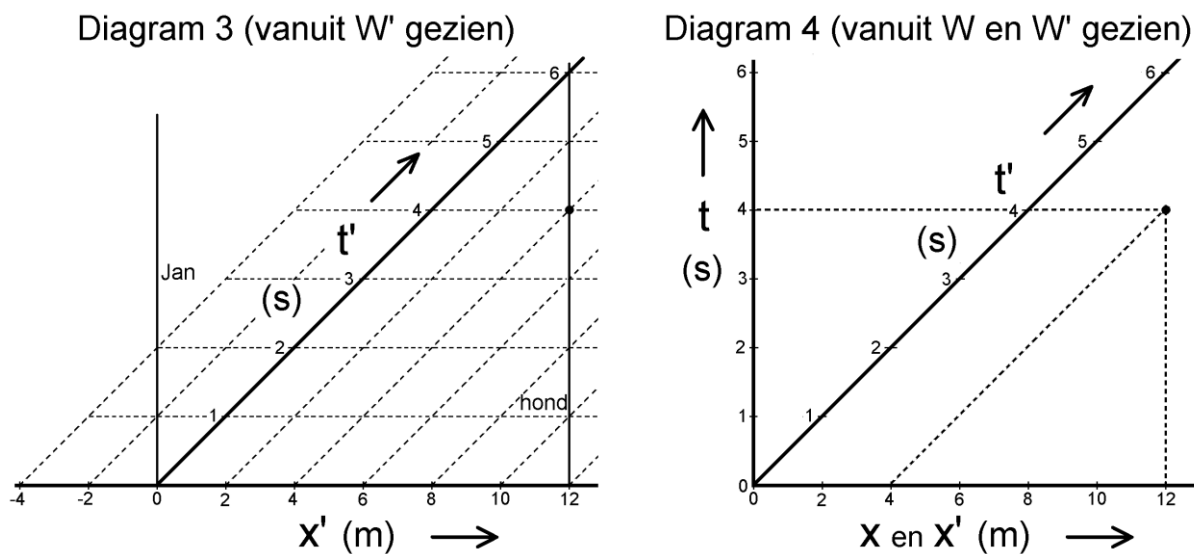
Een gebeurtenis is een fysische situatie of voorval op één bepaalde plaats en één bepaald tijdstip. Bijvoorbeeld: je klapt precies hier en precies nu in je handen. In het tijd-plaats-diagram wordt een gebeurtenis als een stip weergegeven. Zo stelt de stip in de bovenstaande diagrammen een blaf van de hond voor. Voor W zijn de coördinaten van deze blaf $x = 12$ m en $t = 4$ s en voor waarnemer W' zijn de coördinaten $x' = 4$ m en $t' = 4$ s

Een wereldlijn is een lijn in het tijd-plaats-diagram die het verband tussen tijd en plaats van een voorwerp (of iets anders) weergeeft. Zie de twee lijnen in elk van de bovenstaande diagrammen. In diagram 1 valt de wereldlijn van Jan samen met de tijdas, omdat hij voortdurend zit in $x = 0$ m. In diagram 2 valt de wereldlijn van Piet samen met de tijdas, omdat hij voortdurend zit in $x' = 0$ m.

Samenvoegen van twee tijd-plaats-diagrammen

De bovenstaande diagrammen 1 en 2 kunnen we samenvoegen tot één diagram. Dit wordt dan uiteindelijk het onderstaande diagram 4. Daarvoor moeten we eerst diagram 2 ombouwen tot het onderstaande diagram 3. De t' -as is zodanig gekanteld, dat die samenvalt met de wereldlijn van Piet in diagram 1. De verticale rasterlijnen worden met dezelfde hoek gekanteld. De wereldlijnen van Jan en van de hond komen zodoende verticaal te staan, net als in diagram 1. Merk op dat de x' -as niet veranderd wordt.

De aanpassing van het diagram mag natuurlijk geen invloed hebben op de x' - en t' -waarden van een gebeurtenis. Dit is dan ook niet zo. Ga bijvoorbeeld na dat in zowel diagram 2 als in diagram 3 de hond blaft op $x' = 4$ m en op $t' = 4$ s.



We kunnen nu diagram 1 en diagram 3 'over elkaar heen te leggen' en krijgen dan diagram 4. Dit diagram bevat twee tijdassen, namelijk de t - en t' -as, en twee plaatsassen, namelijk de x - en x' -as. Deze laatste twee assen vallen samen.

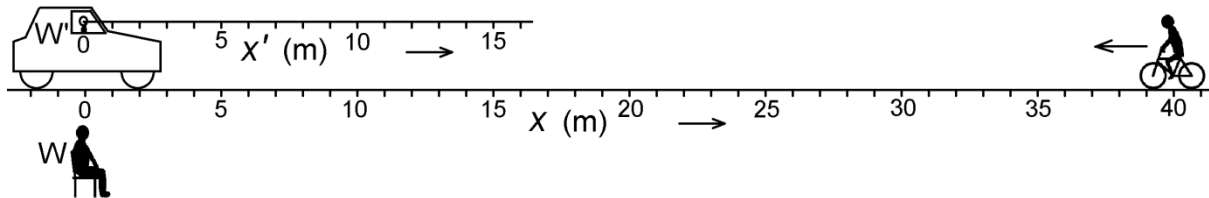
In diagram 4 zijn de rasterlijnen weggelaten. Ook is de wereldlijn van de hond weggelaten. De stip stelt een gebeurtenis voor bijvoorbeeld de blaf van de hond. Met de horizontale stippellijn kun je zien dat deze gebeurtenis plaatsvindt op $t = 4$ s en $t' = 4$ s. Met de andere twee stippellijnen kun je zien dat de gebeurtenis plaatsvindt op $x = 12$ m en $x' = 4$ m. Deze stippellijnen zijn evenwijdig aan de t -as en de t' -as.

Opmerking

In volgende paragrafen maken we kennis met minkowskidiagrammen die twee tijdassen en ook twee plaatsassen bevatten. In deze diagrammen vallen noch de tijdassen, noch de plaatsassen samen.

Voorbeeld van een opgave

In de onderstaande figuur zit waarnemer W op een stoel naast een weg. Het referentiestelsel van W is de x -as, waarvan hij in de oorsprong ($x = 0$) zit. Waarnemer W' rijdt in zijn auto met een snelheid van 10 m/s naar rechts. Het referentiestelsel van W' is de x' -as, waarvan hij in de oorsprong ($x' = 0$) zit. Als W' W passeert, stellen we de tijd van beiden op nul ($t = t' = 0$). Op dat moment zien W en W' op 40 m afstand een fietser met een snelheid van 5 m/s (ten opzichte van de weg) in hun richting fietsen. Na 2 s komt de fietser ten val en blijft liggen.

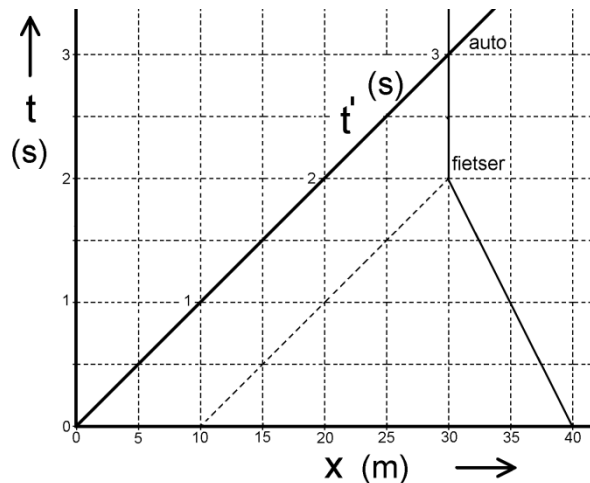


- Maak een tijd-plaats-diagram vanuit het gezichtspunt van W. Teken de wereldlijnen van W' en de fietser in dit diagram.
- Geef in het diagram duidelijk de t' -as (behorende bij W') aan.
- Bepaal uit het diagram op welke afstand van W' de fietser ten val komt.

Oplossing

a. en b.
Zie het diagram hiernaast.

c.
Volgens de stippellijn is de afstand 10 m (aflezen langs de horizontale as).



Opgaven bij § 1

Opgave 1

Wat verstaan we onder een inertiaalstelsel?

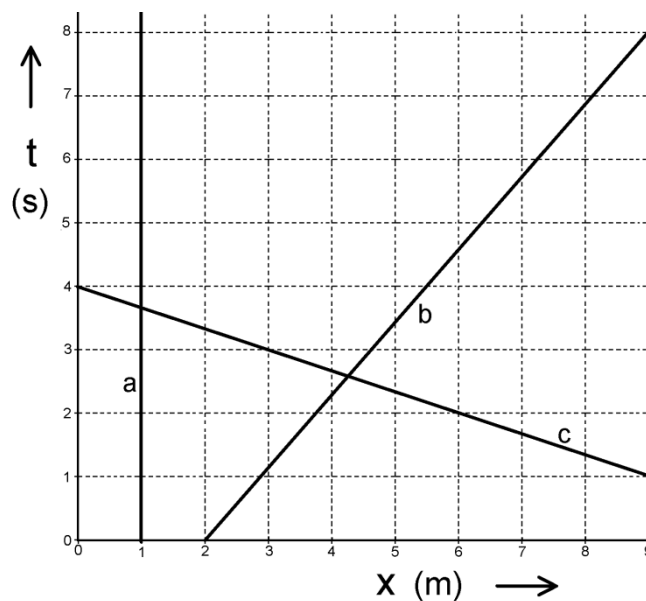
Wat verstaan we onder een gebeurtenis?

Wat verstaan we onder een wereldlijn?

Hoe wordt een gebeurtenis in een tijd-plaats-diagram weergegeven?

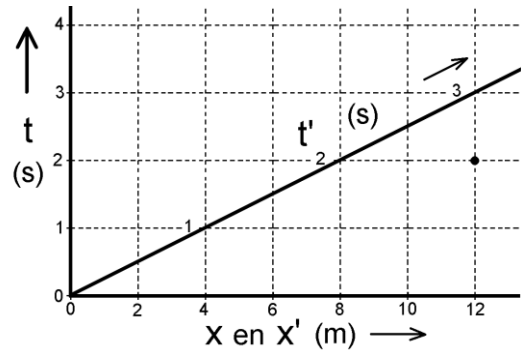
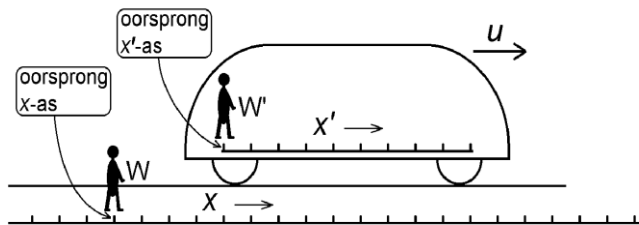
Opgave 2

In het tijd-plaats-diagram hiernaast staan drie wereldlijnen getekend. Geef van elke wereldlijn a t/m c de bijbehorende snelheid.



Opgave 3

In het onderstaande linker figuur rijdt waarnemer W' in zijn kar met snelheid u langs waarnemer W die op de grond staat. In deze gehele syllabus is u de snelheid tussen de waarnemers. Waarnemer W heeft de x -as en waarnemer W' de x' -as als referentiestelsel. Op het moment dat de oorsprong van beide assen samenvallen, begint de tijd te lopen. Het tijd-plaats-diagram van beide waarnemers is in de rechter figuur weergegeven.



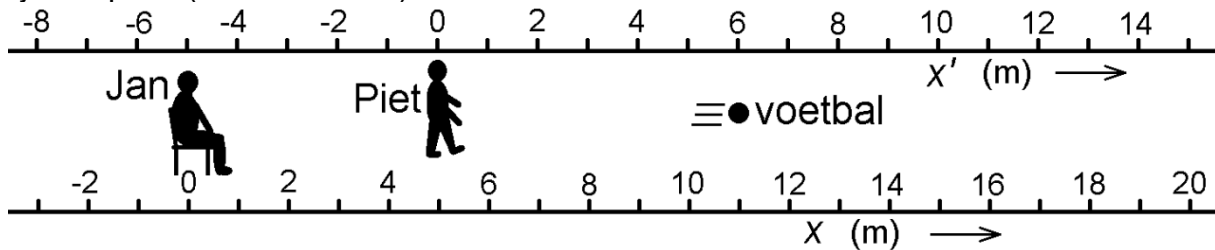
- a.
Bepaal de snelheid u van W' ten opzichte van W .

De dikke stip in het diagram stelt een gebeurtenis voor.

- b.
Bepaal uit het diagram de tijd en plaats van de gebeurtenis voor waarnemer W' . Laat met een stippellijn in het diagram zien hoe je aan je antwoord komt.

Opgave 4

In de onderstaande figuur zit Jan op een stoel. Hij heeft de x -as als referentiestelsel waarvan hijzelf in de oorsprong zit. Piet loopt naar rechts met een snelheid van 1 m/s . Hij heeft de x' -as als referentiestelsel waarvan hij zelf in de oorsprong zit. Op het moment dat Piet langs Jan loopt (dus als $x = x' = 0 \text{ m}$), zetten Jan en Piet hun tijden op 0 s (dus $t = t' = 0 \text{ s}$).



Twee seconden nadat Piet langs Jan loopt (dus als $t = t' = 2 \text{ s}$), schopt Piet een voetbal met een snelheid van 3 m/s (gerekend ten opzichte van de grond) naar rechts.

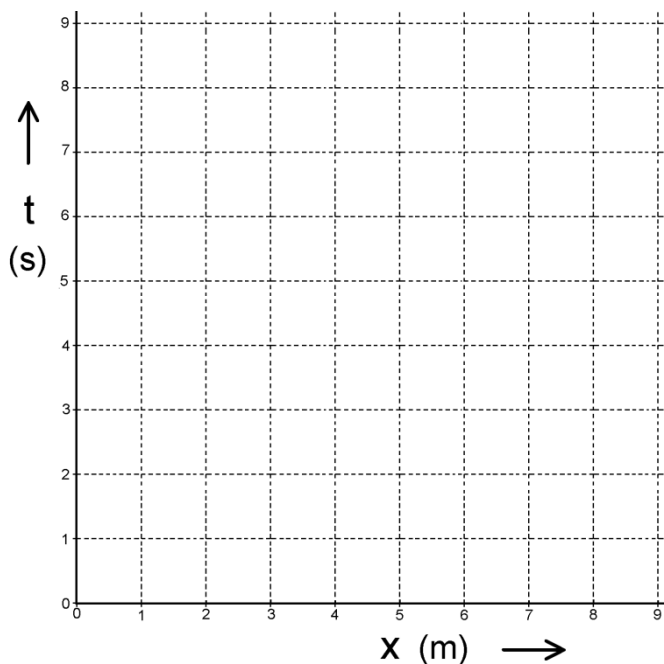
a.
Teken in het t - x -diagram hiernaast de wereldlijn van Piet. Omdat dit de t' -as is, kun je langs deze lijn t' en (s) zetten.

b.
Teken in het t - x -diagram hiernaast de wereldlijn van de bal die door Piet wordt weggeschopt.

Klaas staat 9 m rechts van Jan (dus op $x = 9 \text{ m}$). Op het moment dat Piet Jan passeert, gooit Klaas een schoen met een snelheid van 1 m/s in de richting van Jan en Piet.

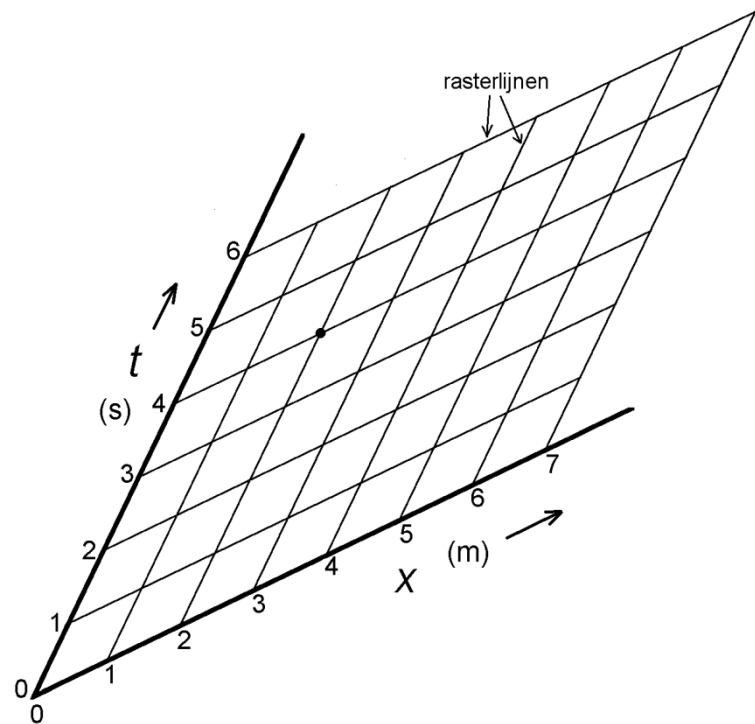
c.
Teken de wereldlijn van deze schoen.

d.
Bepaal aan de hand van het diagram op welke plaats in Piets referentiestelsel de voetbal en de schoen elkaar passeren (zonder te botsen). Geef je werkwijze met een stippellijn weer.



Opgave 5

In het tijd-plaats-diagram hiernaast staan de tijdas en plaatsas niet loodrecht op elkaar. In de volgende paragrafen maken we kennis met zulke diagrammen. De coördinaten van een gebeurtenis kunnen worden bepaald met behulp van rasterlijnen die evenwijdig aan de tijdas en plaatsas lopen. Zo zijn de coördinaten van de dikke stip $x = 2$ m en $t = 4$ s. Ga dat na.



- a.
Teken in het diagram de wereldlijn van een man waarvoor het volgende geldt.

Tussen $t = 0$ s en $t = 2$ s staat hij stil op $x = 2$ m.

Tussen $t = 2$ s en $t = 4$ s loopt hij met een snelheid van 1 m/s naar rechts (in de positieve richting van de x-as).

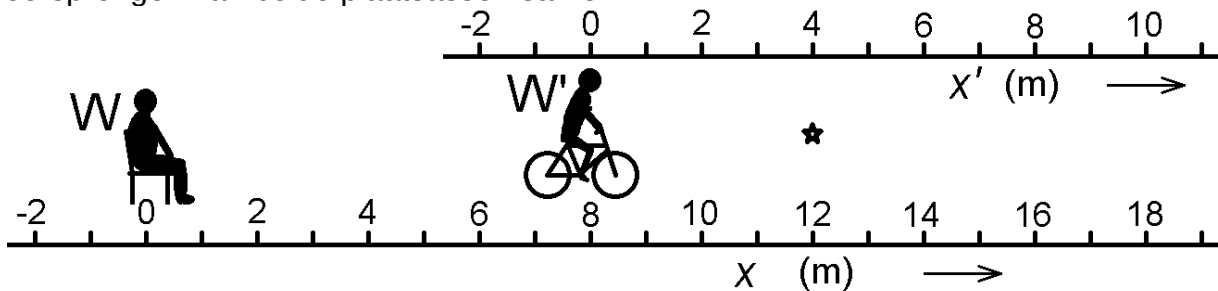
Tussen $t = 4$ s en $t = 6$ s loopt hij met een snelheid van 1 m/s naar links.

- b.
Over welke afstand heeft de man zich tussen $t = 0$ s en $t = 6$ s verplaatst?

§ 2 Galileï-transformatie

Galileï-transformatie

In de onderstaande figuur hebben de twee waarnemers W en W' ieder hun eigen referentiestelsel. Voor W is dat de x-as en voor W' is dat de x'-as. Waarnemer W' beweegt ten opzichte van waarnemer W met snelheid u in de richting van oplopende x (dus in de figuur naar rechts). Op tijdstip nul (dus op $t = t' = 0$) vallen de oorsprongen van beide plaatsassen samen.



In de figuur stelt de ster een willekeurige gebeurtenis voor. Voor W zijn de coördinaten hiervan x en t . Voor W' zijn de coördinaten x' en t' . We kunnen de coördinaten voor W dan eenvoudig omrekenen naar die voor W' en andersom. Dit is mogelijk met de zogenoemde Galileï-transformaties. Deze staan hieronder weergegeven.

$$\begin{array}{ll} \text{Galileï-transformatie} & \begin{cases} x' = x - u \cdot t \\ t' = t \end{cases} \\ \text{van W naar W':} & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Galileï-transformatie} & \begin{cases} x = x' + u \cdot t' \\ t = t' \end{cases} \\ \text{van W' naar W:} & \end{array}$$

De onderste vergelijkingen ($t' = t$ en $t = t'$) geven aan dat de klokken van W en van W' gelijk lopen. De bovenste vergelijkingen kunnen we eenvoudig begrijpen door te bedenken dat de afstand tussen W en W' gelijk is aan de snelheid keer de tijd. Voor hoge snelheden (in de orde van de lichtsnelheid) moet de galileï-transformatie worden vervangen door de lorentztransformatie die breder toepasbaar is (zie hierna).

Getallenvoorbeeld

We kunnen de bovenstaande formules met een getallenvoorbeeld controleren. Stel dat $u = 4 \text{ m/s}$ en dat de coördinaten van een gebeurtenis voor waarnemer W zijn:

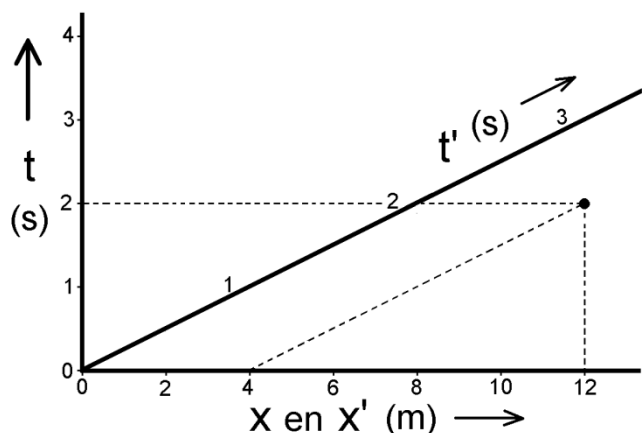
$t = 2 \text{ s}$ en $x = 12 \text{ m}$.

Volgens de galileï-transformatie van W naar W' geldt dan:

$t' = t = 2 \text{ s}$ en

$x' = x - u \cdot t = 12 - 4 \cdot 2 = 4 \text{ m}$.

Dat klopt precies met de waarden voor t' en x' die wij in het tijd-plaats-diagram hiernaast aflezen.



Opgaven bij § 2

Opgave 1

Twee (inertiale) waarnemers bewegen ten opzichte van elkaar. De snelheid van de ene waarnemer ten opzichte van de andere waarnemer is u .

Geef aan of de volgende beweringen juist of onjuist zijn.

a)

Met de galileï-transformatie kunnen de coördinaten van een gebeurtenis (plaats en tijd) bij grote u (in de buurt van de lichtsnelheid) omgerekend worden van de ene naar de andere waarnemer.

b)

De lorentztransformatie is een veralgemenisering van de galileï-transformatie.

c)

Bij de galileï-transformatie wordt ervan uitgegaan dat de klokken van beide waarnemers gelijk lopen.

Opgave 2

Een auto rijdt met een constante snelheid van 70 km/h op een rechte weg in oostelijke richting. Op een bepaald moment rijdt de auto langs een huis. Op dat moment zetten de bewoner van het huis (waarnemer W) en de bestuurder van de auto (waarnemer W') hun klok op nul en begint voor beiden de tijd te lopen. Na 20 minuten ontploft er verder oostwaarts langs de weg een tankstation. De afstand tussen het huis en het tankstation bedraagt 40 km.

Advies voor de toekomst: maak in vergelijkbare opgaven een situatieschets zoals hieronder. Meestal tekenen we (in deze syllabus) waarnemer W in rust en beweegt waarnemer W' naar rechts.



a.

Bereken met de galileï-transformatie hoe ver het tankstation van de auto verwijderd is op het moment van de ontploffing.

Na 35 minuten (vanaf het startmoment van de tijd) ziet de autobestuurder 6 km voor zich een luchtballon opstijgen.

b.

Bereken met de galileï-transformatie hoever deze gebeurtenis van het huis af ligt.

Opgave 3

Twee opmerkingen vooraf.

1)

De volgende opgave moet met de galileï-transformatie opgelost worden. Omdat de snelheid van de waarnemers ten opzichte van elkaar zeer groot is (in de orde van de lichtsnelheid), is de galileï-transformatie eigenlijk niet geldig en zou de lorentztransformatie gebruikt moeten worden!

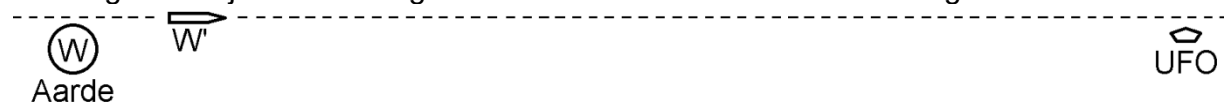
2)

Gebruik in deze opgave de eenheden in de onderstaande tabel. Een lichtjaar is de afstand die het licht in één jaar aflegt.

Grootheid	Eenheid
afstand	ly (light-year)
tijd	y (year)
snelheid	ly/y (light-year per year)

En dan eindelijk de opdracht.

Op een afstand van 4,4 lichtjaar van de aarde (= waarnemer W) bevindt zich een UFO (unidentified flying object). De UFO staat stil ten opzichte van de aarde. Een ruimteschip (= waarnemer W') passeert de aarde met 30% van de lichtsnelheid en beweegt daarbij in de richting van de UFO. Zie de onderstaande figuur.



In het aardse stelsel is er na het passeren van het ruimteschip 5,1 jaar verstreken als de UFO explodeert.

Bereken voor de bemanning van het ruimteschip de afstand tot de UFO als deze explodeert.

§ 3 Postulaten van de speciale relativiteitstheorie

De lichtsnelheid

Als we in een kamer het licht aandoen, is meteen de hele kamer verlicht. Wij ervaren de lichtsnelheid als oneindig groot, maar dat is in feite onjuist. Het licht moet namelijk van de lamp naar de muren reizen, terugkaatsen en in je oog terecht komen. Dit kost gewoon tijd. In het verleden is de lichtsnelheid op een aantal verschillende manieren bepaald. In 1849 vond de Franse natuurkundige Fizeau een snelheid van ongeveer 300 duizend kilometer per seconde. Tegenwoordig is de lichtsnelheid exact 299.792.458 meter per seconde, omdat de meter nu gedefinieerd is aan de hand van de lichtsnelheid.

In de negentiende eeuw wist men al dat licht zich voortbewoog als een soort golf. Men nam aan dat licht een soort geheimzinnige tussenstof nodig had om zich in voort te planten. Dat was bij alle andere golfverschijnselen namelijk ook het geval. Zo had geluid bijvoorbeeld lucht nodig om zich in voort te planten en zeegolven bijvoorbeeld water. Men noemde deze onbekende tussenstof voor licht de 'ether'. Met experimenten kon men het bestaan van de ether echter niet aantonen en in het begin van de twintigste eeuw werd het voor alle natuurkundigen duidelijk dat licht géén tussenstof nodig heeft en dat de ether niet bestaat. Daardoor is licht als golfverschijnsel zeer bijzonder en vormt de lichtsnelheid de basis voor de relativiteitstheorie.

Postulaten van de speciale relativiteitstheorie

De speciale relativiteitstheorie gaat over de manier waarop we gebeurtenissen waarnemen, met name over de manier waarop voorwerpen en gebeurtenissen worden waargenomen vanuit verschillende inertiaalstelsels die een grote snelheid ten opzichte van elkaar hebben. Het gaat bijvoorbeeld over hoe processen in een raket, die met een zeer grote snelheid ten opzichte van de aarde beweegt, door aardbewoners worden waargenomen. De speciale relativiteitstheorie beperkt zich wat betreft de waarnemers tot constante snelheden en dus ook tot constante snelheidsverschillen. In dit opzicht verschilt de speciale relativiteitstheorie van de algemene relativiteitstheorie waarin versnellingen centraal staan.

De speciale relativiteitstheorie van Einstein heeft twee postulaten (uitgangspunten). Een postulaat is een onbewezen stelling die algemeen wordt geaccepteerd. Deze postulaten zijn de volgende:

- 1. De wetten van de natuurkunde zijn in elk inertiaalstelsel dezelfde.**
- 2. De lichtsnelheid in vacuüm is in elk inertiaalstelsel gelijk.**

Het eerste postulaat wordt ook wel het relativiteitsprincipe genoemd. De natuurkundigen Galileï en Newton waren ook al van dit principe doordrongen. Bijvoorbeeld gelden de drie wetten van Newton in elk inertiaalstelsel. Het eerste postulaat zegt eigenlijk ook dat alle inertiaalstelsels onderling volkomen gelijkwaardig zijn. Daarom kun je van geen enkel inertiaalstelsel zeggen dat het in absolute rust verkeert, want een dergelijk stelsel zou dan een bijzondere status t.o.v. de andere stelsels hebben.

Het tweede postulaat was begin 20-ste eeuw echter geheel nieuw. Dat postulaat vloeit voort uit experimenten die omstreeks 1900 met licht zijn uitgevoerd. De lichtsnelheid in vacuüm wordt met c aangeduid en bedraagt (afgerond):

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

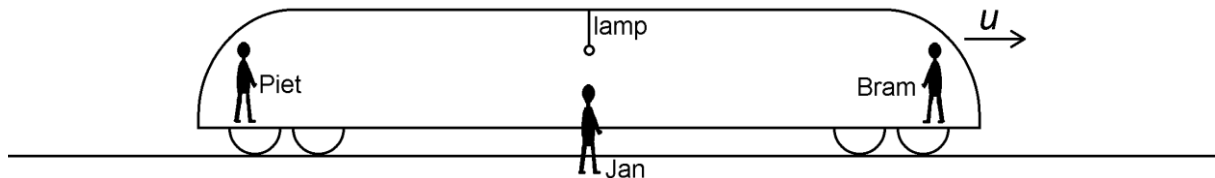


Het tweede postulaat komt niet overeen met onze belevingswereld. Neem de bovenstaande figuren. Links is een situatie getekend die wij ons goed kunnen voorstellen. Een fietsende man gooit een bal naar voren met een snelheid van 10 km/h. Als hij met een snelheid van 20 km/h fietst, heeft de bal voor iemand die op de weg staat een snelheid van 30 km/h. Je kunt de snelheid van de fietser en de snelheid van de bal ten opzichte van de fietser gewoon bij elkaar optellen.

De rechter tekening geeft de situatie voor licht weer. Een raket vliegt met een enorme snelheid, zeg de halve lichtsnelheid, langs de aarde. De raket zendt een lichtstraal in de bewegingsrichting uit. Voor zowel de aardbewoner als ook voor de astronaut in de raket heeft het licht dan de lichtsnelheid. In tegenstelling tot de bal in de linker situatie heeft licht voor alle waarnemers dezelfde snelheid.

Gelijktijdigheid is geen absoluut begrip

Het tweede postulaat heeft verstrekkende gevolgen die vaak tegen onze intuïtie ingaan. Een voorbeeld hiervan betreft de gelijktijdigheid van twee gebeurtenissen. Dat wordt hieronder toegelicht. In de onderstaande figuur staat Jan op de grond en staan Piet en Bram in een trein die met een zeer grote snelheid u naar rechts rijdt. Precies in het midden tussen Piet en Bram hangt een lamp aan het plafond. Op een bepaald moment zendt deze lamp een lichtflits in beide richtingen uit. Na korte tijd zullen Piet en Bram deze lichtflitsen ontvangen.



Volgens Piet en Bram komen de lichtflitsen gelijktijdig bij hen aan. Vanuit hun gezichtspunt komt het licht immers met de lichtsnelheid c naar ieder van hen toe. Omdat de lamp precies in het midden hangt, legt het licht naar Piet een even grote afstand af als naar Bram.

Echter, volgens Jan komt de lichtflits eerder bij Piet dan bij Bram aan. Jan ziet (net als Piet en Bram) het licht met de lichtsnelheid c naar links en naar rechts gaan. Het licht heeft enige tijd nodig om Piet en Bram te bereiken. In die tijd beweegt Piet naar de lamp toe en beweegt Bram van de lamp af. Kortom, het licht van de lamp hoeft volgens Jan een kortere afstand te overbruggen om Piet te bereiken dan om Bram te bereiken.

Uit dit gedachte-experiment blijkt dat wat voor de ene waarnemer gelijktijdig is, voor de andere waarnemer helemaal niet gelijktijdig hoeft te zijn. We kunnen dus de volgende conclusie trekken.

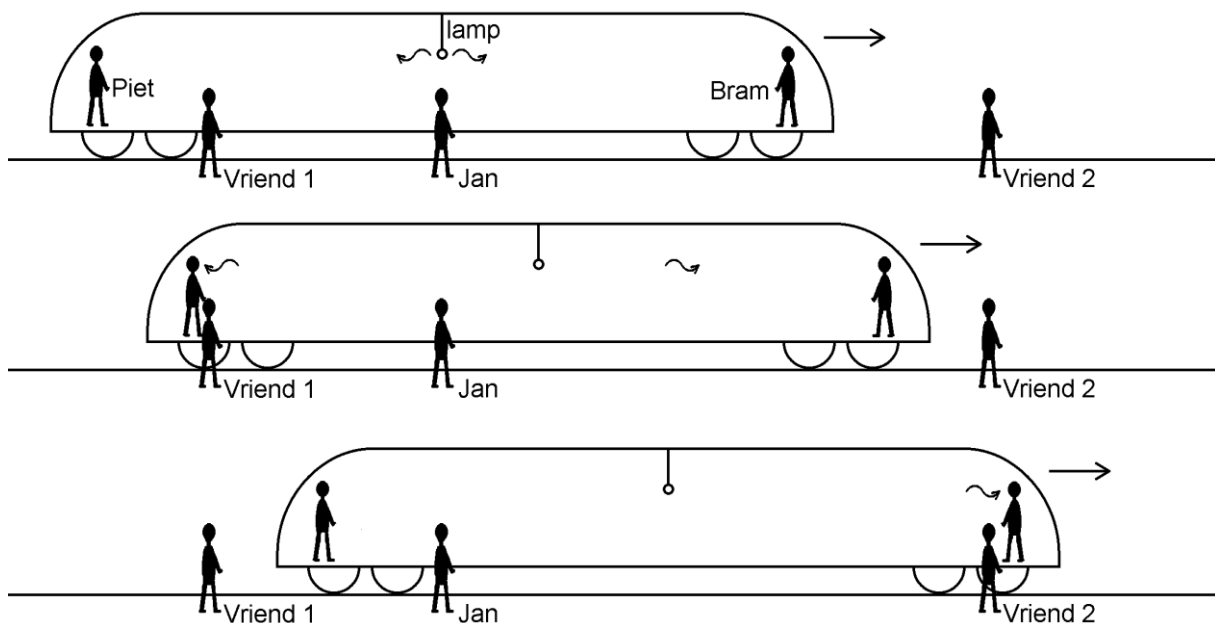
Gelijktijdigheid van twee gebeurtenissen is geen absoluut begrip.

We zien nu in dat het gelijkstellen van de tijden t en t' , zoals we in de vorige paragraaf nog deden, niet meer voortgezet kan worden. In de volgende paragrafen komt dit uitvoerig aan bod.

Het bepalen van de coördinaten van een gebeurtenis

In het laatste voorbeeld staat Jan langs het spoor. Nadat de lamp in de trein op een bepaald moment in beide richtingen een lichtflits heeft uitgezonden, zijn er daarna twee verschillende gebeurtenissen namelijk het aankomen van de lichtflitsen bij Piet en Bram. Je kunt je afvragen hoe Jan precies weet wat de coördinaten (de tijdstippen en de locaties) van deze twee gebeurtenissen zijn. Jan staat immers op enige afstand van de gebeurtenissen.

Een (niet erg praktische) oplossing hiervan is dat er langs het spoor zeer veel (eveneens stilstaande) vrienden van Jan staan met klokken die precies gelijk lopen met de klok van Jan. Twee van zijn vrienden staan precies op de juiste plekken, namelijk waar de twee bovengenoemde gebeurtenissen plaatsvinden. Elke vriend kan dan het tijdstip van de gebeurtenis en ook zijn locatie aan Jan doorgeven. Zie de onderstaande figuren die opvolgende momentopnames voorstellen in het referentiestelsel van Jan.



Opmerkingen

1)

In het bovenstaande voorbeeld (met de rijdende trein) hebben Piet en Bram geen snelheid ten opzichte van elkaar en bevinden zich dus in hetzelfde inertiaalstelsel. Op dezelfde manier bevinden Jan, vriend 1 en vriend 2 zich met z'n drieën ook in een soortgelijk inertiaalstelsel.

2)

Binnen elk inertiaalstelsel lopen alle klokken gelijk. Zoals we hierna zullen zien, lopen deze klokken vanuit een ander inertiaalstelsel bekeken niet gelijk. Bijvoorbeeld lopen de klokken van Piet en Bram niet gelijk volgens Jan (volgens Jan loopt Piets klok voor op Brams klok). Op dezelfde manier lopen de klokken van Jan, vriend 1 en vriend 2 niet gelijk volgens Piet.

Opgaven bij § 3

Opgave 1

Noem de twee postulaten van de speciale relativiteitstheorie.

Opgave 2

In deze opgave tonen we aan dat twee waarnemers onmogelijk met de lichtsnelheid ten opzichte van elkaar kunnen bewegen. In de onderstaande figuur bewegen een foton (dit is een lichtdeeltje) en een racefietser naar rechts. Voor de staande man beweegt het foton uiteraard met de lichtsnelheid. Stel dat voor de staande man de racefietser ook met de lichtsnelheid zou bewegen. Dan zou het foton dus voortdurend naast de racefietser blijven.



- a.
Hoe groot zou de snelheid van het foton voor de racefietser dan zijn? _____
- b.
Leg uit dat dit in strijd is met het tweede postulaat van de relativiteitstheorie.

Opgave 3

Een lichtseconde (symbool: ls) is gedefinieerd als de afstand die het licht in 1 seconde aflegt. Hoe lang is 1 ls?

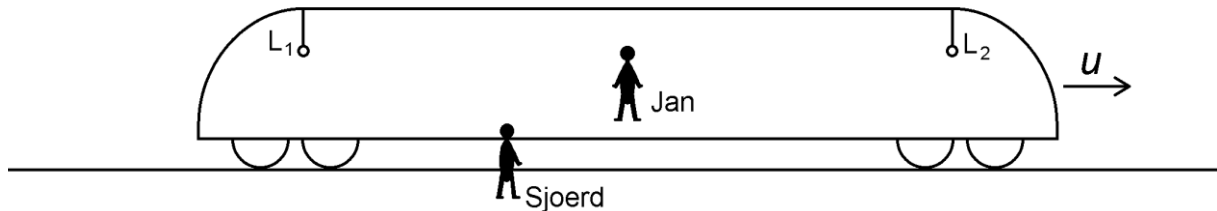
Op dezelfde manier is een lichtjaar (symbool ly van 'lightyear') gedefinieerd. Bereken hoe groot 1 ly is, uitgedrukt in meter.

Opgave 4

Jan en Piet zitten ieder in een eigen raket en bewegen met hoge snelheid in tegengestelde richting van elkaar. Ten opzichte van Jan beweegt Piet met 40% van de lichtsnelheid. Ten opzichte van Piet beweegt Jan ook met 40% van de lichtsnelheid. Beide heren hebben een goed werkend horloge. Toch loopt voor Jan Piets horloge 9% langzamer dan zijn eigen horloge (zie de theorie in de volgende paragrafen). Leg uit waarom voor Piet Jans horloge dan ook 9% langzamer moet lopen dan zijn eigen horloge.

Opgave 5

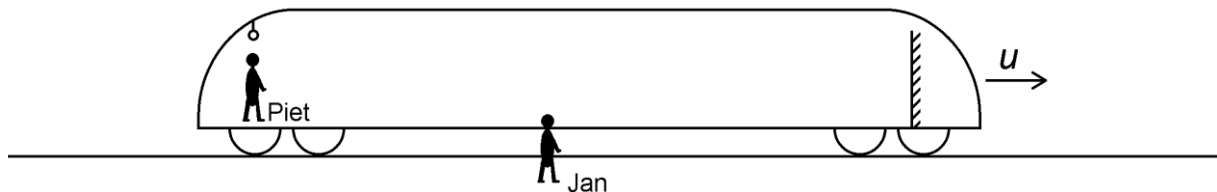
In de onderstaande figuur rijdt Jan in zijn supersnelle trein naar rechts. Links en rechts in de trein hangen de lampen L1 en L2. Jan staat op gelijke afstand van L1 en L2. Langs de kant staat Sjoerd. Terwijl de trein langs Sjoerd rijdt, zenden L1 en L2 ieder een lichtflits uit. Het licht komt gelijktijdig bij Jan aan; daar zijn Jan en Sjoerd het over eens en dit is het uitgangspunt van deze opgave. Voor Jan zenden L1 en L2 hun flitsen gelijktijdig uit en voor Sjoerd zendt L1 zijn flits eerder uit dan L2.



- a.
Leg uit dat voor Jan de lichtflitsen gelijktijdig door L1 en L2 uitgezonden moeten zijn.
- b.
Leg uit dat voor Sjoerd L1 zijn lichtflits eerder moet hebben uitgezonden dan L2.

Opgave 6

In de onderstaande figuur rijdt een trein met grote snelheid u naar rechts. In de trein bevindt Piet zich links en een spiegel rechts. Boven Piet hangt een lamp die een lichtflits uitzendt. Het licht wordt door de spiegel teruggekaatst en vervolgens door Piet waargenomen. We onderscheiden de heenreis van het licht (van lamp naar spiegel) en de terugreis van het licht (van spiegel naar Piet).



- a.
Leg uit dat de snelheid u van de trein geen invloed heeft op de door Piet waargenomen tijdsduur van de heenreis en van de terugreis van het licht.

Jan staat langs de rails.

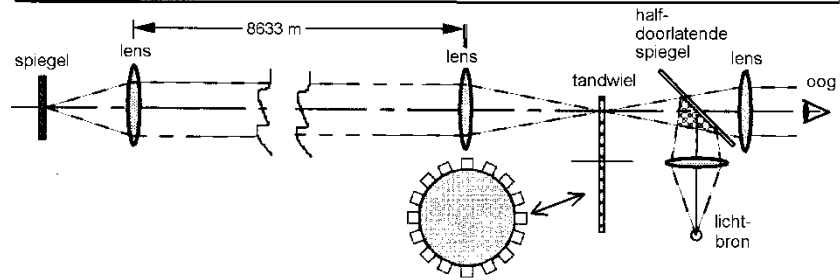
- b.
Leg uit dat de snelheid u van de trein wel invloed heeft op de door Jan waargenomen tijdsduur van de heenreis en van de terugreis van het licht.

Opgave 7 (valt buiten de lesstof)

In 1849 bepaalde Armand Fizeau in Parijs de lichtsnelheid met de opstelling zoals hiernaast is getekend. Hij stond samen met zijn kijker op Montmartre. Bijna 9 km verderop, op de Mont Valérien à Suresnes, stond een spiegel.



Het licht van een continue lichtbron viel op een bolle lens en vervolgens op een halfdoorlatende spiegel. Deze



reflecteerde de helft van het licht; de andere helft werd doorgelaten. Het doorgelaten licht is niet getekend en doet verder niet ter zake. De gereflecteerde lichtbundel kwam in een punt samen ter plaatse van een tandwiel. Als het tandwiel stilstond, viel het licht tussen twee tanden door. Via twee lenzen kwam de bundel op een spiegel terecht die 8633 m verderop stond. Na terugkaatsing legde het licht de omgekeerde weg af terug naar de halfdoorlatende spiegel. Het doorgelaten deel van de lichtbundel kwam via een lens in het oog van Fizeau. De gereflecteerde helft doet verder niet ter zake.

Om de lichtsnelheid te bepalen, liet Fizeau het tandwiel draaien met een steeds groter wordend toerental. Bij een bepaald toerental viel de teruggekaatste lichtbundel, die op de heenweg tussen twee tanden doorgedaan was, op de volgende tand van het tandwiel en zag Fizeau niets meer. Uit dit toerental kon Fizeau de lichtsnelheid berekenen. We gaan er bij deze opgave vanuit dat de tanden even breed zijn als de ruimte tussen de tanden.

a.

Bereken hoelang het licht erover doet om bij de proef van Fizeau heen en weer te gaan als je uitgaat van een lichtsnelheid van $3,00 \cdot 10^8$ m/s.

Fizeau maakte gebruik van een tandwiel met 720 tanden. Fizeau zag net niets meer bij een omloopfrequentie van 12,6 Hz.

b.

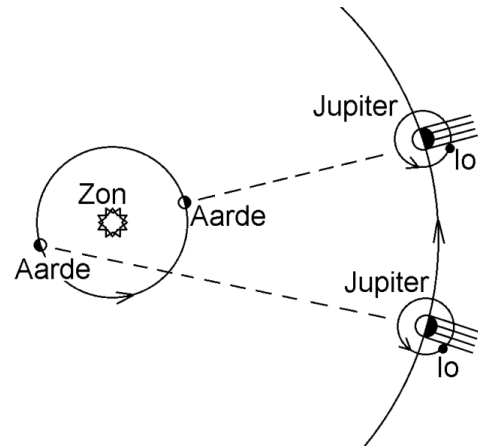
Bereken met deze gegevens de tijd die het licht nodig had om heen en weer te gaan.

c.

Bereken welke waarde Fizeau voor de lichtsnelheid vond.

Opgave 8 (valt buiten de lesstof)

De eerste degelijke meting van de lichtsnelheid werd uitgevoerd door de Deen Ole C. Rømer in 1676, door observaties van de maan Io van Jupiter. Net zoals de drie andere grote manen van Jupiter (die toen reeds bekend waren) beweegt Io op regelmatige tijdstippen door de schaduw van de planeet Jupiter. Zie de figuur hiernaast. Io is dan plotseling niet meer zichtbaar. Rømer zag dat, naarmate de afstand tussen Jupiter en de aarde groter werd, het tijdstip van verdwijning steeds iets later gebeurde dan wat men zou verwachten. Dat kwam omdat het licht van iets verder moest komen. Wanneer de afstand tussen Jupiter en de aarde weer kleiner werd, kwamen de verdwijningen van Io weer naar voren in de tijd.



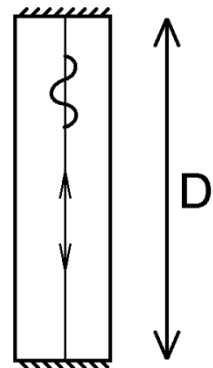
Rømer vond dat de verdwijning van Io bij een maximale afstand tussen Jupiter en de aarde 22 minuten later plaats vond dan bij een minimale afstand tussen Jupiter en de aarde. In die tijd schatte men de afstand aarde-zon op 140 miljoen km. Neem aan dat de afstand van Jupiter tot de zon niet verandert.

Bereken met deze gegevens de snelheid van het licht en bereken hoeveel procent deze waarde afwijkt van de correcte lichtsnelheid.

§ 4 Tijdsduurrek

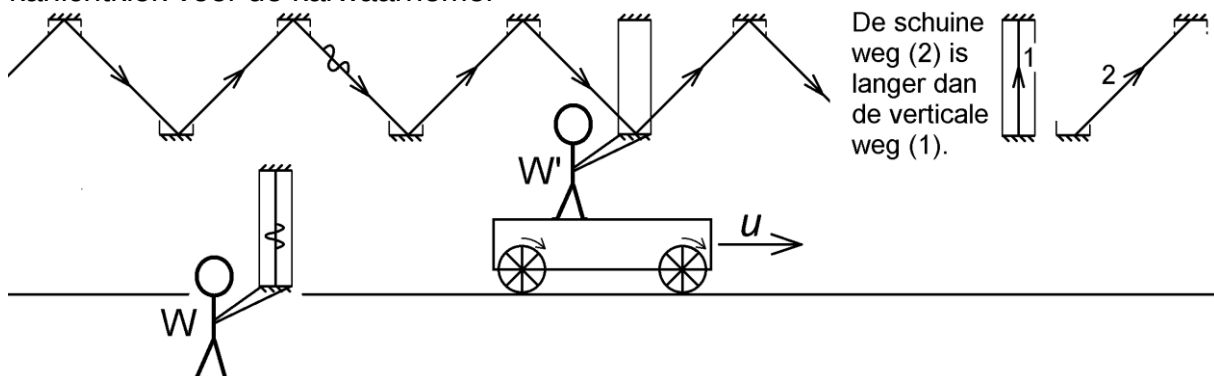
Lichtklok

In de figuur hiernaast is een zogenoemde 'lichtklok' getekend. Een lichtklok bestaat uit twee evenwijdige spiegels en een lichtpuls (foton) die continu tussen de spiegels op en neer beweegt. De afstand tussen de twee spiegels is met D aangegeven. De klokperiode is de tijd die het licht erover doet om één keer op en neer te gaan. Zoals we hierna zullen zien, neemt de klokperiode toe voor iemand die de verticaal opgestelde lichtklok met grote snelheid in horizontale richting ziet bewegen. Voor diegene loopt de klok dus langzamer.



Bewegende klokken lopen langzamer

In de onderstaande figuur staat waarnemer W in de berm langs de weg en rijdt waarnemer W' op een kar met een constante snelheid u naar rechts. We noemen W hierna de bermwaarnemer en W' de karwaarnemer. De snelheid u is in de orde van de lichtsnelheid. We nemen gemakshalve aan dat de luchtwrijving geen rol speelt. Beide waarnemers houden een verticaal opgestelde lichtklok voor zich. We noemen deze de bermlichtklok en de karlichtklok. Beide lichtklokken zijn identiek; essentieel hierbij is dat de afstand D tussen de spiegels van beide lichtklokken gelijk is. De bermlichtklok heeft voor de bermwaarnemer dus dezelfde klokperiode als de karlichtklok voor de karwaarnemer.



1)

De lichtpuls in de karlichtklok legt in één periode een grotere afstand af dan de lichtpuls in zijn eigen lichtklok. Vergelijk bijvoorbeeld de schuine weg 2 met de verticale weg 1 (zie rechts in de figuur; dit betreft een halve periode).

2)

De snelheid van het licht heeft een vaste waarde.

Voor de bermwaarnemer (W) loopt de karlichtklok dus langzamer dan zijn eigen klok. Hoe groter de snelheid u van de kar is, des te trager de karlichtklok voor hem loopt. Overigens zal de karwaarnemer (W') juist vinden dat de bermlichtklok langzamer loopt. De situatie voor beide waarnemers is dus symmetrisch (denk aan het eerste postulaat van de speciale relativiteitstheorie).

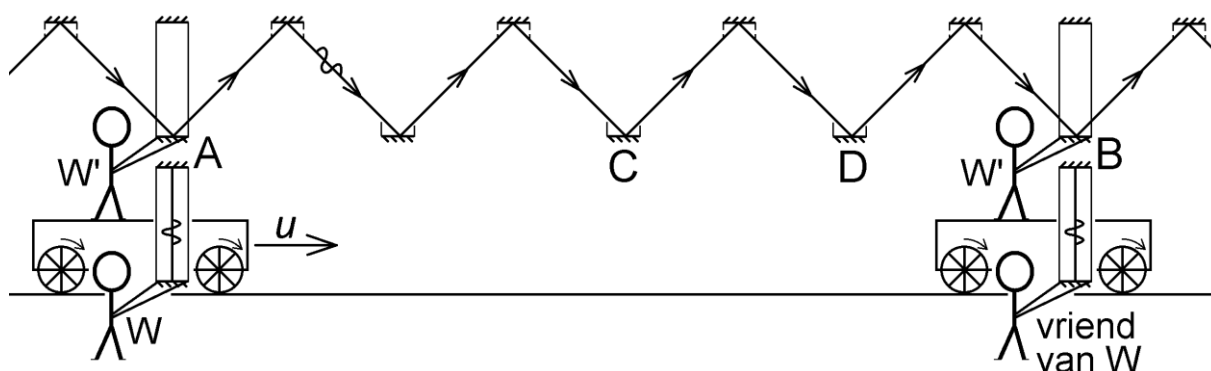
Voor de bermwaarnemer is niet alleen de karlichtklok trager geworden maar geldt deze vertraging voor alle (!) verschijnselen op de kar. Voor hem verloopt alles op de kar als in een soort slow motion film. Neem bijvoorbeeld het hart in het lichaam van de karwaarnemer. Voor de bermwaarnemer klopt dit met minder slagen per minuut dan voor de karwaarnemer zelf. Ook gaat het verouderingsproces van de karwaarnemer voor de bermwaarnemer langzamer dan voor de karwaarnemer zelf.

Samengevat geldt het volgende.

Voor een waarnemer verlopen alle processen in een voor hem bewegend systeem langzamer. Anders gezegd: bewegende klokken lopen langzamer dan stilstaande klokken.

Eigentijd en uitgerekte tijd tussen twee gebeurtenissen

We blijven nog even bij het vorige voorbeeld met de bermwaarnemer W en de karwaarnemer W' . De bermwaarnemer heeft een vriend die ook in de berm staat maar een stuk verderop. Zie de onderstaande figuur. Beide heren hebben hun klokken (niet per se lichtklokken) gesynchroniseerd. Omdat ze ten opzichte van elkaar stil staan, blijven hun klokken daarna gelijk lopen. Je kunt ook zeggen dat beide bermwaarnemers tot hetzelfde inertiaalstelsel behoren.



Eerst passeert de karwaarnemer de linker bermwaarnemer en daarna de rechter bermwaarnemer. Dit zijn achtereenvolgens gebeurtenis A en gebeurtenis B. Zie de letters in de figuur. We nemen voor het gemak aan dat bij gebeurtenis A de karklok en de linker bermklok op nul staan. Vanuit de bermwaarnemers bekeken staat de rechter bermklok op dat moment dan ook op nul (vanuit de karwaarnemer bekeken geldt dit niet omdat hij in een ander inertiaalstelsel zit).

Volgens de bermwaarnemers loopt de karklok langzamer dan hun eigen klokken (zie de uitleg hierboven). Dat heeft tot gevolg dat de karklok bij gebeurtenis B minder aanwijst dan de rechter bermklok.

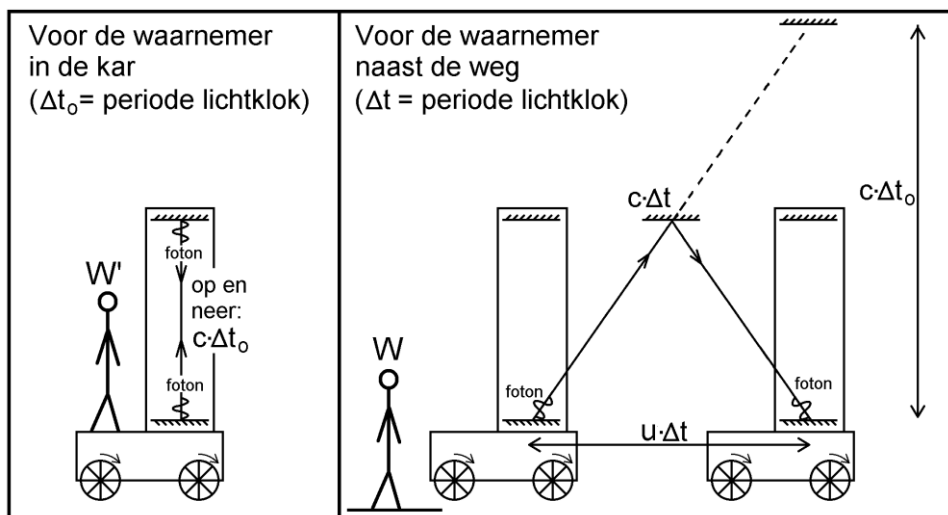
Voor de karwaarnemer vinden beide gebeurtenissen A en B op dezelfde locatie plaats, namelijk bij zijn kar. Voor hem is de tijdsduur tussen A en B de zogenoemde 'eigentijd' Δt_0 . Voor de bermwaarnemer (en zijn vriend) vinden de gebeurtenissen op verschillende locaties plaats. Voor hen is de tijdsduur tussen A en B de 'uitgerekte tijd' Δt . Altijd geldt $\Delta t > \Delta t_0$.

Het verschijnsel dat Δt groter is dan Δt_0 heet 'tijdsduurrek', 'tijdrek' of 'tijddilatatie'.

In het volgende onderdeel van deze paragraaf wordt het verband afgeleid tussen de eigen tijd Δt_0 en de uitgerekte tijd Δt . We gaan daarbij uit van de gebeurtenissen C en D (zie de letters in de bovenstaande figuur). De tijd tussen C en D is dus de klokperiode van de karlichtklok. Voor de karwaarnemer is dit de eigen tijd want voor hem hebben C en D dezelfde locatie (namelijk pal voor zijn neus). Voor de bermwaarnemers is het de uitgerekte tijd.

Het verband tussen de eigentijd Δt_0 en de uitgerekte tijd Δt

In de onderstaande figuren is de afgelegde weg van het foton binnen de karlichtklok getekend voor zowel de karwaarnemer W' (linker figuur) als voor de bermwaarnemer W (rechter figuur). De karwaarnemer ziet het licht verticaal op en neer gaan. Voor hem legt het licht in een klokperiode een afstand $c \cdot \Delta t_0$ af (met c = lichtsnelheid en Δt_0 = eigentijd). De bermwaarnemer ziet het licht niet alleen op en neer gaan maar ook opzij gaan. Voor hem legt het licht in een klokperiode een afstand $c \cdot \Delta t$ af (met Δt = uitgerekte tijd). In de rechter figuur is de terugweg van het licht ten behoeve van de inzichtelijkheid gestippeld getekend in het verlengde van de schuin omhoog gaande weg.



In klokperiode Δt beweegt de kar naar rechts over een afstand $u \cdot \Delta t$ waarbij u de snelheid van de kar ten opzichte van de bermwaarnemer W is. Volgens de wet van Pythagoras geldt dan:

$$(c \cdot \Delta t)^2 = (u \cdot \Delta t)^2 + (c \cdot \Delta t_0)^2.$$

Hieruit volgt: $\Delta t^2 - \frac{u^2}{c^2} \Delta t^2 = \Delta t_o^2$.

Hieruit volgt:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Rekenvoorbeeld 1

In de kar in het bovenstaande voorbeeld bevindt zich een hoeveelheid polonium-210. Deze isotoop is radioactief met een halveringstijd van 138 dagen. In dit kader is de 138 dagen de eigentijd. Als de kar een snelheid van 70% van de lichtsnelheid heeft (dus $u/c = 0,7$), is de halveringstijd voor de waarnemer in de berm als volgt te berekenen.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{138 \text{ d}}{\sqrt{1 - 0,70^2}} = 193 \text{ d}$$

Rekenvoorbeeld 2

Een raket beweegt in een rechte baan met de halve lichtsnelheid eerst langs ster A en daarna langs ster B. De sterren staan stil ten opzichte van elkaar. Voor de waarnemers op ster A en/of ster B bedraagt de reistijd tussen A en B 2,3 jaar. De reistijd tussen A en B voor de bemanning van de raket is de eigentijd en kan als volgt berekend worden (met $u/c = 0,5$).

$$\Delta t_o = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 2,3 \text{ jaar} \cdot \sqrt{1 - 0,5^2} = 2,0 \text{ jaar}$$

Samenvatting

We kunnen het bovenstaande nu als volgt algemeen samenvatten.

W en W' zijn inertiaalwaarnemers (geen versnellingen dus) en bewegen ten opzichte van elkaar met snelheid u . Er vinden twee gebeurtenissen A en B plaats. Voor W hebben A en B verschillende plaatsen; voor W' hebben A en B dezelfde plaats. Voor W is de tijdsduur tussen A en B altijd groter dan voor W'.

W' meet de 'eigentijd' en die is aangegeven met Δt_o .

W meet de 'uitgerekte tijd' en die is aangegeven met Δt .

Er geldt:
$$\Delta t = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Opgaven bij § 4

Opgave 1

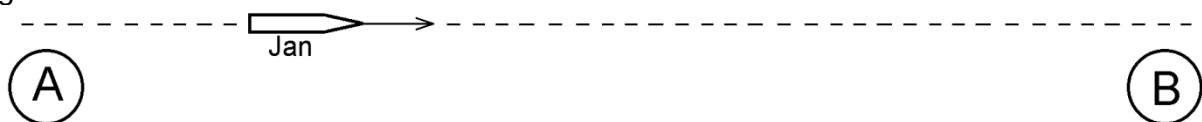
Jo vliegt met een zeer hoge constante snelheid in een raket langs Tim. Jo en Tim hebben van zichzelf gemeten dat ze 80 hartslagen per minuut hebben. Voor Tim heeft Jo echter 60 hartslagen per minuut. Vanwege de symmetrische situatie (beide waarnemers zijn gelijkwaardig) geldt dat voor Jo Tim ook slechts 60 hartslagen per minuut heeft. Verklaar nu deze lagere hartslag (60 in plaats van 80).

Opgave 2

Een ver sterrenstelsel dat met grote snelheid van ons weg beweegt, zien wij in een vroeg stadium van zijn ontwikkeling. Omgekeerd zien de bewoners van het verre sterrenstelsel ons in een vroeg ontwikkelingsstadium. Net als in de vorige opgave is er weer een symmetrische situatie wat de waarnemers betreft. Een van de redenen waarom iedere waarnemer de ander in een vroeg ontwikkelingsstadium ziet, is dat het licht er een tijd over doet om grote afstanden te overbruggen. Geef een tweede reden.

Opgave 3

Jan vliegt met zijn raket eerst langs planeet A en daarna langs planeet B. Zie de onderstaande figuur. Jans snelheid ten opzichte van planeet A is 80% van de lichtsnelheid. Het passeren van planeet A en het passeren van planeet B beschouwen we als twee gebeurtenissen. Voor Jan is de tijd tussen beide gebeurtenissen 55 s.



a.

Leg uit dat deze 55 s de 'eigentijd' is.

b.

Bereken de reistijd volgens de bewoners van planeet A.

Opgave 4

In een ruimte waar vacuüm heerst bevindt zich een 50 cm lange liniaal. Een bètadeeltje beweegt op kleine afstand evenwijdig aan de liniaal met 92% van de lichtsnelheid.

a.

Toon aan dat volgens de stilstaande waarnemer (ten opzichte van de liniaal) de tijdsduur van de beweging langs de liniaal 1,8 ns bedraagt (nano = 10^{-9}). Gebruik hierbij: "tijdsduur = afstand gedeeld door snelheid".

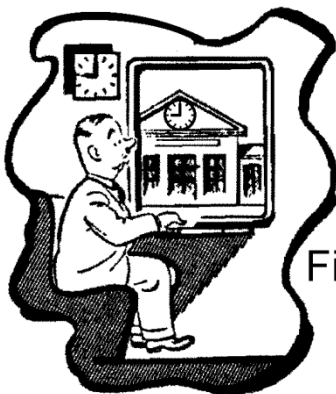
b.

Bereken de tijdsduur van de beweging langs de liniaal voor de waarnemer die met het bètadeeltje meereist. Dit is de 'eigentijd'.

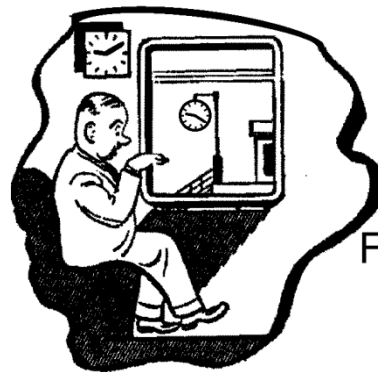
Opgave 5

In deze opgave gaan we uit van een platte aarde zonder tijdzones. Een trein rijdt met zeer grote, constante snelheid langs een aantal stations. Elk station heeft een goed werkende stationsklok. Voor de stationsopzichters (die dus in rust zijn ten opzichte van de stationsklokken) lopen alle stationsklokken gelijk aan elkaar.

In de onderstaande figuren zit een man in de trein. In figuur A passeert de man een station. De stationsklok wijst negen uur aan. De (eveneens goed werkende!) klok in de trein, die naast het raam hangt, wijst bij het passeren van het station ook negen uur aan.



Figuur A



Figuur B

Als het op de klok in de trein tien over negen is, passeert de trein een volgend station. De stationsklok wijst daar 10 voor half 10 aan. Zie figuur B.

a.

Leg uit dat de reistijd tussen beide stations voor de man in de trein de 'eigentijd' is.

b.

Bereken de snelheid van de trein, uitgedrukt als percentage van de lichtsnelheid.

Opgave 6

Deze opgave gaat over de zogenoemde 'tweelingparadox'. Jan en Jim zijn tweelingen. Jan heeft een hekel aan reizen en blijft thuis. Jim is astronaut en vliegt in zijn raket met bijvoorbeeld 80% van de lichtsnelheid naar de dichtstbijzijnde ster. Op een gegeven moment komt Jim daar aan.

a.

Welke van de onderstaande beweringen is of zijn juist.

- A. Vanuit Jans gezichtspunt veroudert Jim gedurende de reis langzamer dan zichzelf.
- B. Vanuit Jans gezichtspunt veroudert Jim gedurende de reis sneller dan zichzelf.
- C. Vanuit Jims gezichtspunt veroudert Jan gedurende de reis langzamer dan zichzelf.
- D. Vanuit Jims gezichtspunt veroudert Jan gedurende de reis sneller dan zichzelf.

b.

Na korte tijd besluit Jim terug te gaan naar de aarde en doet dat met dezelfde snelheid als op de heenreis.

Welke van de onderstaande beweringen is of zijn juist.

- A. Vanuit Jans gezichtspunt veroudert Jim gedurende de reis langzamer dan zichzelf.
- B. Vanuit Jans gezichtspunt veroudert Jim gedurende de reis sneller dan zichzelf.
- C. Vanuit Jims gezichtspunt veroudert Jan gedurende de reis langzamer dan zichzelf.
- D. Vanuit Jims gezichtspunt veroudert Jan gedurende de reis sneller dan zichzelf.

Beide waarnemers (Jan en Jim) zijn NIET gelijkwaardig als je naar de gehele reis kijkt (heen en terug). Anders gezegd: er is géén symmetrie wat waarnemers betreft.

c.

Leg dat uit.

Ter info

Bij thuiskomst is Jim nog in de kracht van zijn leven terwijl Jan al een oude man is. Jim is namelijk géén inertiaalwaarnemer. Hij versnelt (vertraagt) immers aan het begin, halverwege en aan het eind van zijn reis. Daarbij treden er tijdseffecten op die buiten de speciale relativiteitstheorie vallen.

Opgave 7

Muonen zijn elementaire deeltjes met een (gemiddelde) levensduur van $2,2 \mu\text{s}$. Deze $2,2 \mu\text{s}$ is de 'eigen tijd', dus waargenomen door een meebewegende waarnemer (dus voor wie de muonen stilstaan). Muonen worden op grote hoogte in de dampkring gecreëerd door kosmische straling. Stel dat een muon na zijn ontstaan recht naar beneden (dus richting aardoppervlak) beweegt met een snelheid van 99,9% van de lichtsnelheid.

a.

Toon dan aan dat de levensduur van dit muon gezien vanuit een waarnemer op het aardoppervlak $49 \mu\text{s}$ bedraagt.

b.

Toon aan dat de afstand die het muon aflegt volgens de waarnemer op het aardoppervlak 15 km bedraagt.

c.

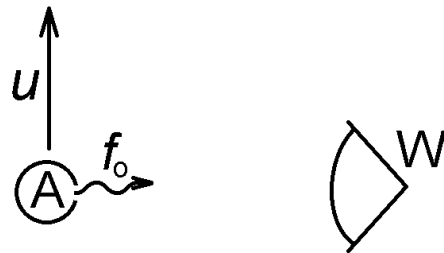
Vanuit het muon bekeken beweegt het aardoppervlak met 99,9% van de lichtsnelheid naar boven. Toon aan dat binnen de levensduur van het muon de afstand die het aardoppervlak volgens het muon aflegt 660 m bedraagt.

Opmerking

Als het muon in deze opgave op een hoogte van 10 km ontstaat, zou je kunnen twijfelen of het muon het aardoppervlak wel of juist niet bereikt. Het goede antwoord is dat dit wel het geval is. Voor het muon is de dampkring namelijk veel dunner dan voor de aardbewoners. Dit behandelen we hierna bij het onderwerp 'lengtekrimp'.

Opgave 8 (valt buiten de lesstof)

In de figuur hiernaast beweegt atoom A met grote snelheid u voor de stilstaande waarnemer W langs. W is symbolisch als een oog getekend. Op het moment dat de afstand tussen A en W het kleinst is, zendt A een foton (= lichtdeeltje) uit. In het referentiestelsel van het atoom heeft dit foton frequentie f_0 . Simpel gezegd zijn er dan f_0 trillingen per tijdseenheid (seconde) in het foton.



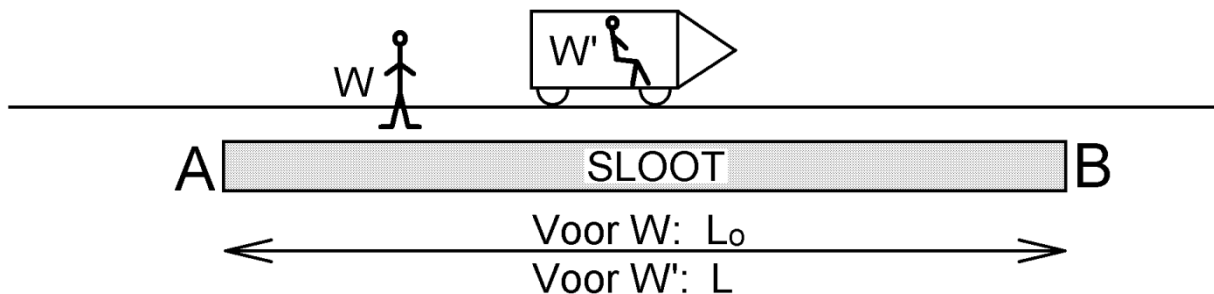
Echter, snelheid u is zo hoog, dat alle processen in en rond het atoom voor W merkbaar langzamer verlopen en dat de door W waargenomen frequentie lager is. Dit effect staat bekend als het 'transversale dopplereffect'.

Stel nu dat A met 75% van de lichtsnelheid beweegt en dat de f_0 gelijk is aan $1,0 \cdot 10^{15}$ Hz. Bereken dan de frequentie van het foton voor W.

§ 5 Lengtekrimp

Lengtekrimp

In deze paragraaf kijken we naar de lengte van voorwerpen en de afstand tussen twee punten in de ruimte zoals deze worden waargenomen door verschillende waarnemers. In de figuur hiernaast ligt een sloot langs de weg. Waarnemer W staat op de grond langs de sloot. Waarnemer W' rijdt in zijn racewagen met grote snelheid u langs de sloot. Voor W heeft de sloot lengte L_0 . We noemen deze lengte de eigenlengte omdat de sloot voor W stilstaat. Voor W' heeft de sloot lengte L . Zoals we hierna zullen zien, is L kleiner dan L_0 en zouden we hem de 'gekrompen lengte' kunnen noemen.



De uiteinden van de sloot zijn in de figuur met A en B aangeduid. Het door de kar passeren van A beschouwen we als eerste gebeurtenis en het door de kar passeren van B beschouwen we als tweede gebeurtenis. Voor de waarnemer in de kar is de tijd tussen beide gebeurtenissen de eigentijd Δt_0 omdat beide gebeurtenissen voor hem op dezelfde locatie plaatsvinden. Voor de waarnemer op de grond is de tijd tussen beide gebeurtenissen de uitgerekte tijd Δt . Zoals we in de vorige paragraaf hebben gezien, wordt het verband tussen beide tijden door de volgende formule gegeven.

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Beide waarnemers bevinden zich in een symmetrische situatie. Voor waarnemer W beweegt waarnemer W' met snelheid u naar rechts. Voor waarnemer W' beweegt waarnemer W met snelheid u naar links. Het feit dat zowel W als W' dezelfde relatieve snelheid u waarnemen, volgt uit het eerste postulaat van de relativiteitstheorie die zegt dat alle inertiaalstelsels gelijkwaardig zijn.

We passen nu toe dat de afgelegde afstand gelijk is aan de snelheid keer de tijdsduur.

Voor waarnemer W wordt dit: $L_0 = u \cdot \Delta t$.

Voor waarnemer W' wordt dit: $L = u \cdot \Delta t_0$.

Hieruit volgt:

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

We zien dat de door W' waargenomen lengte van de sloot kleiner is dan de door W waargenomen lengte. We noemen dit verschijnsel lengtekrimp of lorentzcontractie. Lengtekrimp geldt in principe voor alle voorwerpen (niet alleen voor sloten). Lengtekrimp vindt overigens alleen plaats in de bewegingsrichting. Zo zou een snelvliegend vliegtuig wel korter worden en dus de staart dichterbij de neus komen, maar de spanwijdte blijft gelijk. Ook verandert de hoogte van de cockpit niet.

Samenvattend geldt het volgende.

De lengte van een voorwerp (of de afstand tussen twee vaste punten in de ruimte) wordt kleiner, als dit voorwerp een grote snelheid ten opzichte van de waarnemer heeft. De lengtekrimp vindt alleen plaats in de bewegingsrichting (niet loodrecht daarop).

De waarnemer die stilstaat ten opzichte van een voorwerp, meet eigenlengte L_0 van het voorwerp.

De waarnemer die met snelheid u beweegt ten opzichte van een voorwerp, meet de gekrompen lengte L van het voorwerp.

$$\text{Er geldt: } L = L_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

Rekenvoorbeeld

Een raket vliegt met een snelheid van 70% van de lichtsnelheid langs een ijzeren staaf. De staaf heeft een eigenlengte van 140 cm en heeft dezelfde lengterichting als de vliegrichting van de raket. De door de mensen in de raket waargenomen lengte is:

$$L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = 140 \text{ cm} \cdot \sqrt{1 - 0,70^2} = 100 \text{ cm}$$

Opmerking

In deze paragraaf wordt het symbool L voor de afstand gebruikt. In een van de volgende paragrafen wordt het ruimtetijdinterval besproken en daarbij wordt het symbool Δx voor afstand gebruikt. Het verschil zit 'm in het feit dat L de afstand tussen twee vaste punten in de ruimte is (zoals de uiteinden van een staaf) en Δx de afstand tussen twee gebeurtenissen.

Lorentzfactor

De factor waarmee de tijdsduur uitrekt en waarmee de lengte van een voorwerp kleiner wordt, wordt de lorentzfactor genoemd en wordt vaak aangeduid met de Griekse letter γ (gamma). Voor de lorentzfactor geldt dus:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

De formule voor de tijdsduurrek wordt dan: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$.

De formule voor de lengtekrimp wordt dan: $L = \frac{L_0}{\gamma}$.

De verhouding van de snelheid u en de lichtsnelheid c wordt vaak met de Griekse letter β (bèta) aangeduid. Hiervoor geldt dus:

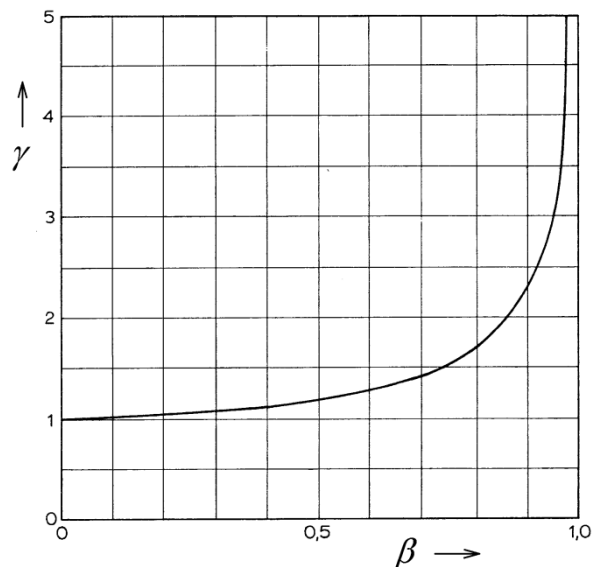
$$\beta = \frac{u}{c}.$$

Het verband tussen γ en β is dus:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Het diagram hiernaast toont grafisch hoe γ van β afhangt. Bij $\beta = 0,70$ lezen we uit het diagram af: $\gamma = 1,4$.

Tijdsduurrek en lengtekrimp vinden dan plaats met factor 1,4. Zo is in het voorgaande voorbeeld de staaf met een factor 1,4 korter geworden (van 140 cm naar 100 cm).



Merk op dat, als de snelheid u veel kleiner is dan de lichtsnelheid, de waarde van β naar nul nadert en γ dus naar de waarde 1 nadert. Dat betekent dat tijdsduurrek en lengtekrimp dan nauwelijks optreden. We zien heel eenvoudig dat alle in het normale leven optredende snelheden (denk aan treinen, auto's, vliegtuigen, raketten etc.) veel te klein zijn t.o.v. de lichtsnelheid om tot een merkbaar verschil te komen tussen twee waarnemers. Dat verklaart dat in de eeuwen voor de ontdekking van de relativiteitstheorie niemand ooit deze verschillen heeft bemerkt.

Opgaven bij § 5

Opgave 1

Een piloot vliegt in zijn raket met een snelheid van 40% van de lichtsnelheid. De raket is volgens de piloot 50 m lang.

a.

Leg uit dat deze 50 m de eigenlengte van de raket is.

b.

Bereken hoe lang de raket is volgens de waarnemer op de grond.

c.

Bereken de snelheid van de raket als deze voor de waarnemer op de grond 40 m lang is. Druk de snelheid uit in de lichtsnelheid.

Opgave 2

Muonen zijn elementaire deeltjes die bovenin de dampkring ontstaan en een gemiddelde levensduur van $2,2 \mu\text{s}$ hebben. Hun snelheid ligt dicht bij de lichtsnelheid. Volgens de klassieke mechanica kunnen naar beneden bewegende muonen het aardoppervlak nooit bereiken: daarvoor is hun levensduur simpelweg te kort. Volgens de relativiteitstheorie kan het echter wel. Vanuit de waarnemer op het aardoppervlak bekeken is het mogelijk omdat voor hem de levensduur van een muon veel groter is dan $2,2 \mu\text{s}$ (tijdsduurrek). Vanuit het muon bekeken is het mogelijk omdat voor hem de dampkring veel dunner is dan voor aardbewoners (lengtekrimp).

In deze opgave wordt de dampkring vanuit het oogpunt van het muon bekeken. Stel dat de dampkring 10 km dik is (voor de waarnemer op het aardoppervlak). Uiteraard is dit de 'eigendikte' van de dampkring.

a.

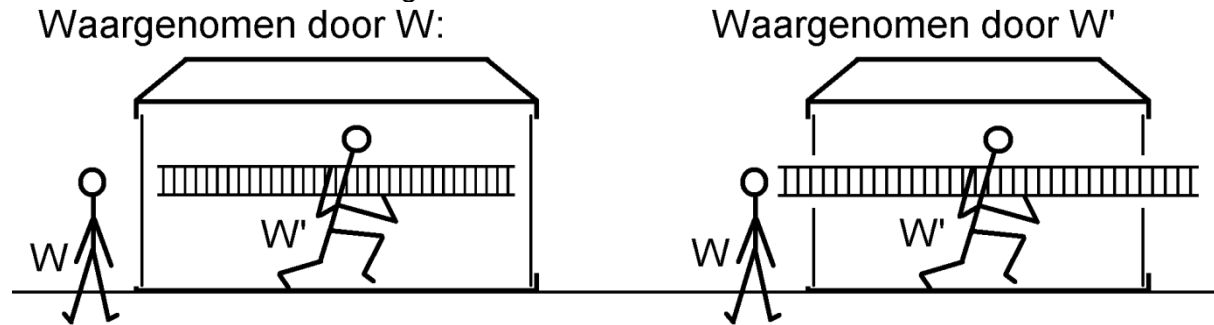
Bereken dan de dikte van de dampkring vanuit het oogpunt van het muon als deze verticaal naar beneden (loodrecht op de dampkring) beweegt. Ga er daarbij vanuit dat het muon met 99,9% van de lichtsnelheid gaat.

b.

Toon vervolgens aan dat het muon het aardoppervlak wel bereikt.

Opgave 3

Deze opgave gaat over de zogenoemde 'ladderparadox'. Stel dat een ladder even lang is als een schuur. Waarnemers W en W' doen een experiment. Waarnemer W staat stil naast de schuur. Waarnemer W' pakt de ladder op en rent met een enorme snelheid (in de orde van de lichtsnelheid) door de schuur met de ladder onder zijn arm. Zie de onderstaande figuren.



Nu doet zich iets interessants voor. Waarnemer W ziet de ladder voorbij vliegen en voor hem is de ladder korter geworden (lengtekrimp). Voor hem past de ladder nu makkelijk in de schuur. Op het moment dat de ladder zich in de schuur bevindt, sluit hij gelijktijdig beide deuren van de schuur heel even. Deze situatie is in de linker figuur getekend. Daarna opent hij de deuren weer.

Waarnemer W' ziet dat niet de ladder maar juist de schuur korter geworden is. Voor hem is het dus onmogelijk dat beide deuren tegelijkertijd gesloten zijn terwijl hij met de ladder in de schuur zit.

Bedenk de oplossing voor deze paradox.

Opgave 4

In deze opgave gebruiken we het symbool β voor u/c . Als β veel kleiner is dan 1, is $\sqrt{1-\beta^2}$ bij benadering gelijk aan $1 - \frac{1}{2}\beta^2$ (dit wordt in de wiskunde aangetoond). De formule $L = L_o \sqrt{1-\beta^2}$ wordt dan: $L = L_o (1 - \frac{1}{2}\beta^2)$.

a.

Bewijs dan dat voor heel kleine β voor de afname ΔL van de lengte geldt:

$$\Delta L = \frac{1}{2} \cdot L_o \cdot \beta^2.$$

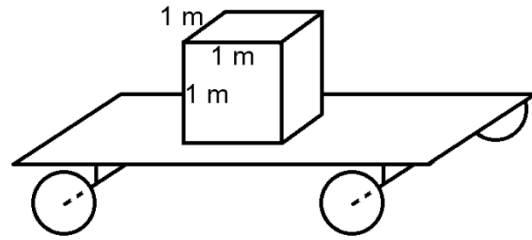
We gaan dit resultaat gebruiken voor de volgende situatie. De 'Concorde' was een zeer snel passagiersvliegtuig dat met twee keer de geluidssnelheid (mach 2) tussen onder andere Londen en New York vloog en hier slechts drie en een half uur voor nodig had. De afstand tussen Londen en New York bedraagt 5576 km. Dit is de eigenlengte voor de mensen die in rust zijn ten opzichte van het aardoppervlak. Stel dat het vliegtuig de overtocht maakt met een snelheid van 600 m/s.

b.

Bereken dan hoeveel korter de afstand tussen Londen en New York wordt voor de mensen in het vliegtuig ten gevolge van de lengtekrimp.

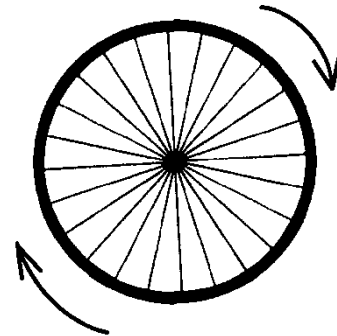
Opgave 5

Een kubusvormig blok beton van 1 m bij 1 m bij 1 m wordt op een treinwagon geladen. Bereken het volume van de kubus voor jou als de wagon (met kubus erop) met 90% van de lichtsnelheid langs je rijdt.



Opgave 6

Deze opgave staat in de literatuur bekend als de paradox van Ehrenfest. Zoals in de tekst besproken is, treedt lengtekrimp alleen op voor afmetingen in dezelfde richting als de snelheid. Met dit in het achterhoofd kijken we naar een star wiel dat zeer snel ronddraait. Zie de figuur hiernaast. Bij voldoende grote snelheid verandert de omtrek van de baan wel terwijl de straal gelijk blijft. Wat heeft dit voor gevolgen voor π (= omtrek gedeeld door diameter)?



Opgave 7

In deze opgave tonen we aan dat lengtekrimp alleen optreedt in de bewegingsrichting en dus niet in de twee andere richtingen loodrecht op de bewegingsrichting. We beschouwen daartoe een vrachtwagen die in een tunnel rijdt. In stilstand is de vrachtwagen net zo hoog als de tunnel. Waarnemer W staat stil in de tunnel en waarnemer W' rijdt in de vrachtwagen mee.

Neem bijvoorbeeld aan dat een bewegend voorwerp lager wordt, als het in horizontale richting beweegt. Kies dan onder die aanname het juiste woord in de volgende zinnen.

Voor waarnemer W wordt de vrachtwagen/tunnel lager en ontstaat er dus wel/geen schade.

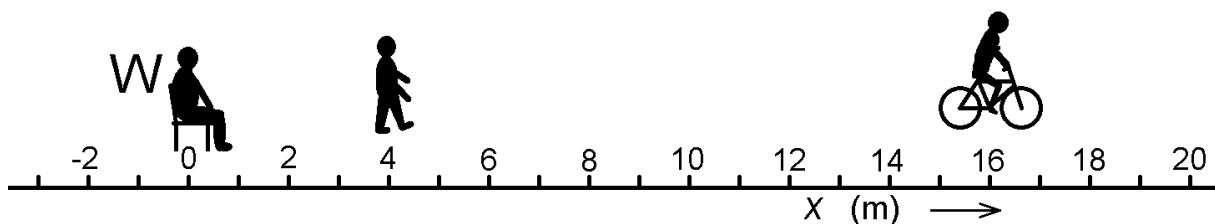
Voor waarnemer W' wordt de vrachtwagen/tunnel lager en ontstaat er dus wel/geen schade.

Omdat er onmogelijk wel schade voor de ene waarnemer en geen schade voor de andere waarnemer kan zijn, concluderen we hieruit dat een bewegend voorwerp niet lager wordt als het in horizontale richting beweegt. Op dezelfde manier kun je concluderen dat het voorwerp niet hoger, smaller of breder wordt.

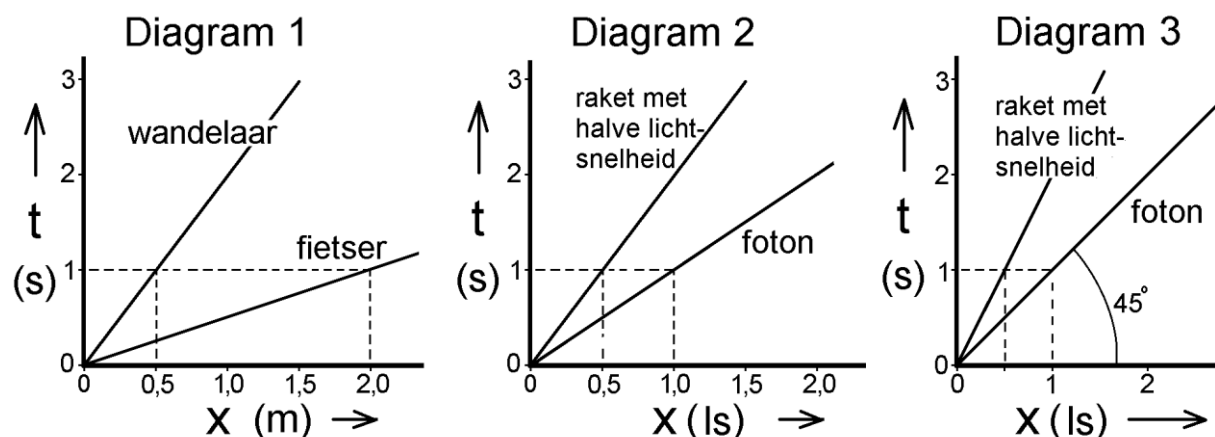
§ 6 Minkowskidiagram deel 1

Tijd-plaats-diagram geschikt maken voor grote snelheden

In deze paragraaf beperken we ons tot slechts één waarnemer W. In de onderstaande figuur gebruikt W de x-as als plaatsaanduiding. Op tijdstip $t = 0$ wordt hij gepasseerd door een (langzame) wandelaar en door een fietser. De snelheid van de wandelaar bedraagt 0,5 m/s en die van de fietser bedraagt 2 m/s. De figuur schetst de situatie enige seconden nadat W door de wandelaar en de fietser is ingehaald.



Het onderstaande diagram 1 stelt het bij W horende tijd-plaats-diagram voor. In dit diagram zijn de wereldlijnen van de wandelaar en van de fietser getekend. Hoe groter de snelheid van de passerende persoon (of voorwerp) is, des te kleiner de hellingshoek van de wereldlijn is. Bij zeer hoge snelheden loopt de bijbehorende wereldlijn bijna horizontaal en is het diagram praktisch onbruikbaar.



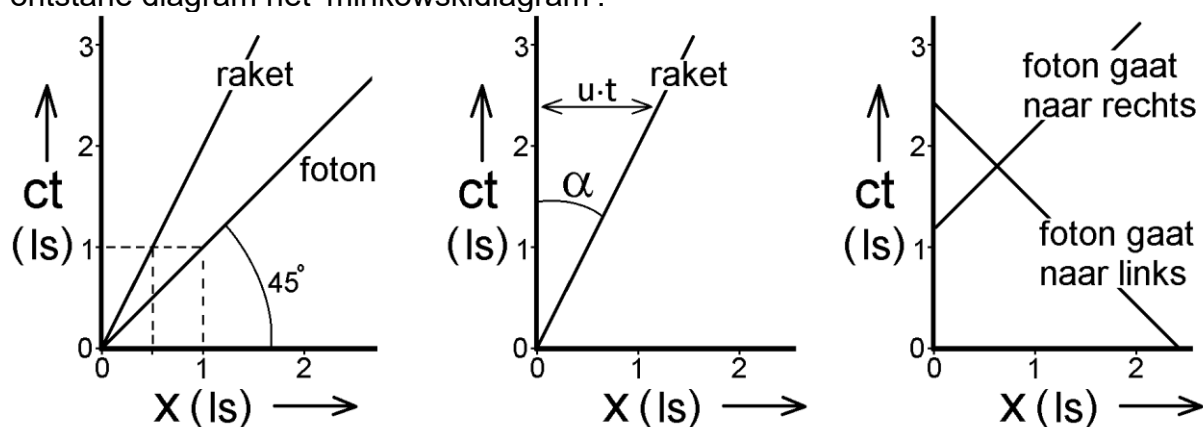
Om diagram 1 geschikt te maken voor hoge snelheden moet de horizontale as (de x-as) als het ware worden 'gecomprimeerd' of 'ingedikt'. Een zeer drastische maatregel om dit te doen is om de afstandseenheid meter te vervangen door de 'lichtseconde' (symbool ls). Dit is de afstand die het licht in één seconde aflegt. Deze eenheid is in diagram 2 langs de horizontale as gebruikt.

In diagram 2 zijn de wereldlijn van een foton (of lichtpuls) en van een raket die met de halve lichtsnelheid beweegt getekend. Het foton heeft in 1 seconde een lichtseconde afgelegd (ga dat in de figuur na!) en gaat dus inderdaad met de lichtsnelheid. De raket heeft in 1 seconde een halve lichtseconde afgelegd en gaat dus met de halve lichtsnelheid.

In diagram 3 is 1 seconde langs de verticale as even lang getekend als 1 lichtseconde langs de horizontale as. Het gevolg hiervan is dat de wereldlijn van het foton een hoek van 45° maakt met de horizontale as en ook met de verticale as. De wereldlijn deelt de hoek tussen de horizontale en de verticale as dus in twee gelijke hoeken.

Minkowskidiagram

Het onderstaande linker diagram is voortgekomen uit het bovenstaande diagram 3 door langs de verticale as de tijd te vervangen door de lichtsnelheid keer de tijd. We krijgen dan de afstand ct met als eenheid ls (= lichtseconde). Het mooie hiervan is dat de verticale en de horizontale as dan precies dezelfde schaalverdeling krijgen. Langs beide assen staat dan namelijk dezelfde grootte (afstand) met dezelfde eenheid (lichtseconde) die even lang getekend wordt. We noemen het aldus ontstane diagram het 'minkowskidiagram'.



De overstap van tijd (t) naar lichtsnelheid keer tijd (ct) heeft geen gevolgen voor de stand van de wereldlijnen. Bedenk hierbij dat $t = 1$ s overeenkomt met $ct = 1$ ls. Stel bijvoorbeeld dat $ct = 3$ ls. Dan weet je meteen dat $t = 3$ s.

Naast de lichtseconde kunnen in het minkowskidiagram ook andere afstandseenheden gebruikt worden zoals lichtuur of lichtjaar. De enige voorwaarde is dat de gekozen eenheid dan wel langs beide assen genomen moet worden.

Als een voorwerp met snelheid u naar rechts beweegt, geldt voor de hoek α tussen de wereldlijn van dit voorwerp en de ct -as:

$$\tan(\alpha) = \frac{u}{c}.$$

Zie bijvoorbeeld de wereldlijn van de raket in het middelste diagram. Vanuit hoek α bekeken is de lengte van de overstaande rechthoekszijde $u \cdot t$ en die van de aanliggende rechthoekszijde $c \cdot t$. Hieruit volgt de bovenstaande formule. Als de raket met de halve lichtsnelheid gaat, geldt dus: $\tan(\alpha) = 0,5$.

Tot nu toe hebben we alleen kennis gemaakt met de wereldlijn van een naar rechts bewegend voorwerp of foton. In de rechter figuur zijn twee wereldlijnen getekend namelijk die van een naar rechts bewegend foton en die van een naar links bewegend foton. Beide wereldlijnen maken een hoek van 45° met de horizontale as.

Opgaven bij § 6

Opgave 1

Hiernaast is een minkowskidiagram getekend.

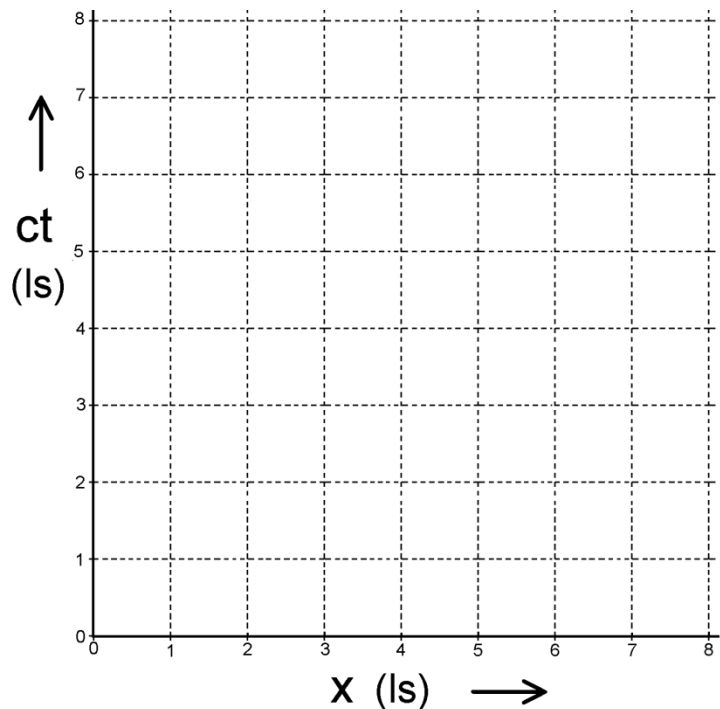
a.

Teken in het diagram de wereldlijn van een foton dat vanuit de oorsprong vertrekt in de positieve x-richting.

b.

Teken in het diagram de wereldlijn van vier deeltjes die vanuit de oorsprong met respectievelijk 12,5%, 25%, 50% en 75% van de lichtsnelheid bewegen.

Advies: ga voor elk deeltje na waar zijn wereldlijn de lijn $ct = 8 \text{ ls}$ snijdt.

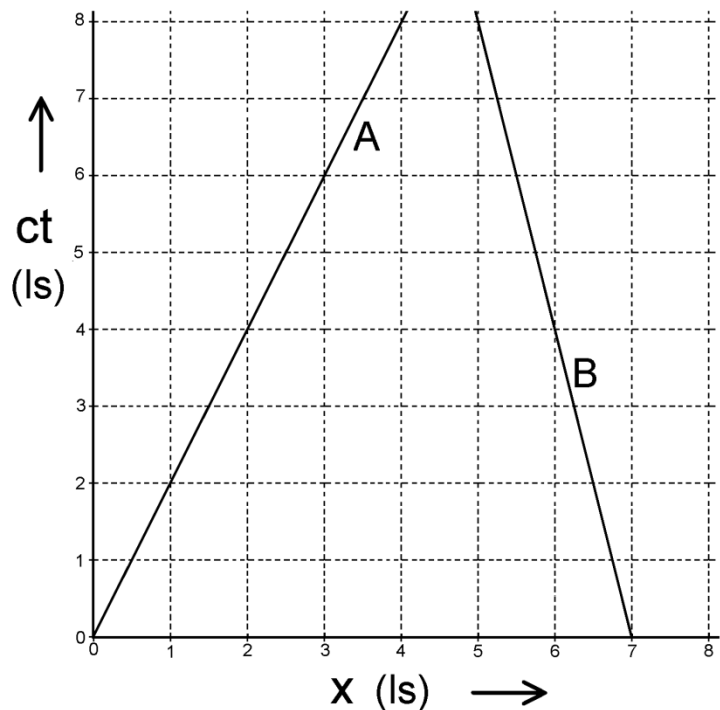


Opgave 2

Hiernaast is een minkowskidiagram getekend. In het diagram zijn de wereldlijn van raket A en raket B getekend.

a.

Bepaal de snelheid van raket A en van raket B. Druk deze snelheden uit als fractie van de lichtsnelheid



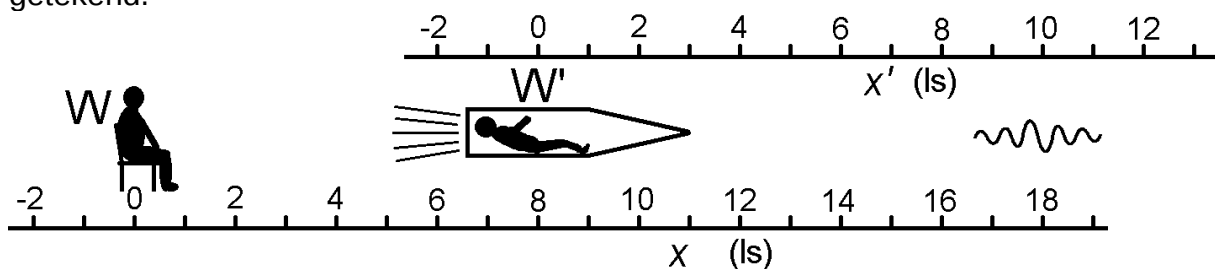
b.

Raket A zendt op $t = 4 \text{ s}$ een lichtpuls in beide richtingen uit. Teken de wereldlijn van deze lichtpulsen (fotonen).

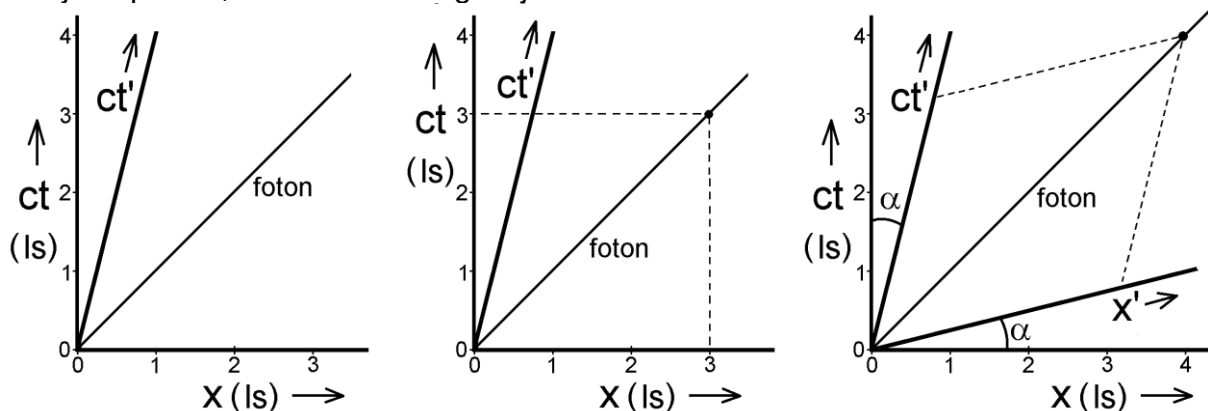
§ 7 Minkowskidiagram deel 2

Minkowskidiagram voor twee waarnemers

In de onderstaande figuur hebben de twee waarnemers W en W' ieder hun eigen plaatsas. Voor W is dat de x-as en voor W' is dat de x'-as. Waarnemer W' beweegt ten opzichte van waarnemer W met snelheid u in de richting van oplopende x (dus in de figuur naar rechts). Als de oorsprongen van beide plaatsassen samenvallen, zetten beide waarnemers hun tijden op nul (dus bij $x = x' = 0$ geldt $t = t' = 0$). Op het moment dat waarnemer W wordt gepasseerd door waarnemer W', zendt W een foton (of lichtpuls) uit in de richting van oplopende x. Het foton is ook in de figuur getekend.



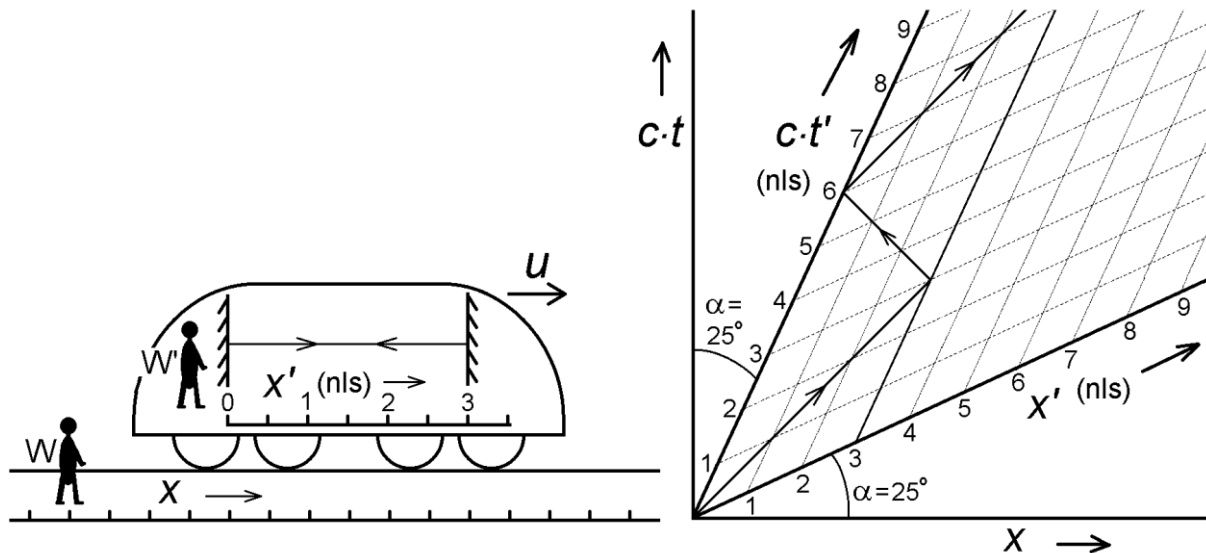
In het onderstaande linker minkowskidiagram behoren de verticale en horizontale as bij waarnemer W. In het diagram zijn twee wereldlijnen getekend namelijk van waarnemer W' en van het foton. De wereldlijn van waarnemer W' is tevens de tijdas van W'. Op elk punt van deze lijn geldt namelijk $x' = 0$. Als we in deze paragraaf over de tijdas praten, bedoelen we eigenlijk de ct' -as of de ct -as.



Voor waarnemer W gaat het foton met de lichtsnelheid. Er moet dus gelden: $x = c \cdot t$. Dit blijkt ook uit het middelste minkowskidiagram want de wereldlijn van het foton deelt de hoek tussen de tijdas en plaatsas van W in twee gelijke hoeken van 45° . Volgens het tweede postulaat moet het foton ook voor waarnemer W' met de lichtsnelheid gaan. Dus moet ook gelden: $x' = c \cdot t'$. In het minkowskidiagram wordt dit bereikt door de plaatsas van W' zodanig te kantelen, dat de wereldlijn van het foton gelijke hoeken maakt met de tijdas en plaatsas van W'. Zie het rechter minkowskidiagram. De hoek α tussen beide tijdassen is gelijk aan de hoek α tussen beide plaatsassen. Analoog aan de tijdas en plaatsas van W hebben de tijdas en de plaatsas van W' dezelfde schaalverdeling.

Voorbeeld van een minkowskidiagram

In de onderstaande linker figuur rijdt een grote speelgoedtrein met 47% van de lichtsnelheid naar rechts. In de trein bevindt zich een lichtklok waarbij het licht in horizontale richting heen en weer gaat. De afstand tussen de spiegels bedraagt (voor de met de spiegels meebewegende waarnemer) 3 nanolichtseconde (afgekort 3 nls). Dit komt neer op 90 cm. Op de grond bevindt zich waarnemer W en in de trein waarnemer W'. Waarnemer W heeft de x-as als plaatsas en W' de x'-as.



We kiezen in de trein de positie van de linker spiegel als nulpunt van de x'-as. Op het moment dat het nulpunt van de x'-as samenvalt met dat van de x-as, stellen we de tijden van beide waarnemers gelijk aan nul (dus $t = t' = 0$). Op dat moment vertrekt een lichtpuls (of foton) vanaf de linker spiegel.

In de rechter figuur is het minkowskidiagram voor beide waarnemers getoond. De hoek α tussen beide tijdassen en ook tussen beide plaatsassen volgt uit:

$$\tan(\alpha) = \frac{u}{c}$$

We vinden dan: $\alpha = \arctan(0,47) = 25^\circ$.

Deze hoek is in de figuur aangegeven.

De wereldlijn van de linker spiegel is de ct'-as. Voor de wereldlijn van de rechter spiegel geldt $x' = 3$ nls. De wereldlijn van het foton gaat zigzaggend tussen de twee eerder genoemde wereldlijnen naar boven. Elk recht stuk van de wereldlijn maakt een hoek van 45° met de (horizontale) x-as. Uit het diagram blijkt dat voor waarnemer W' de heenreis en terugreis van het foton even lang duren namelijk 3 ns. Ga dat na. Ook blijkt duidelijk dat voor waarnemer W het foton meer tijd nodig heeft voor de heenreis dan voor de terugreis.

Eventueel over te slaan (geen verplichte lesstof):

Schaalverdeling langs de assen van het minkowskidiagram

Hiernaast staat een minkowskidiagram afgebeeld. Duidelijk blijkt dat de schaalverdeling langs de ct' -as en x' -as uitgerekend is ten opzichte van die langs de ct -as en x -as. Anders gezegd: de eenheden langs de ct' -as en x' -as zijn langer getekend. In het voorbeeld van hiernaast is de schaalfactor voor de assen gelijk aan 1,29.

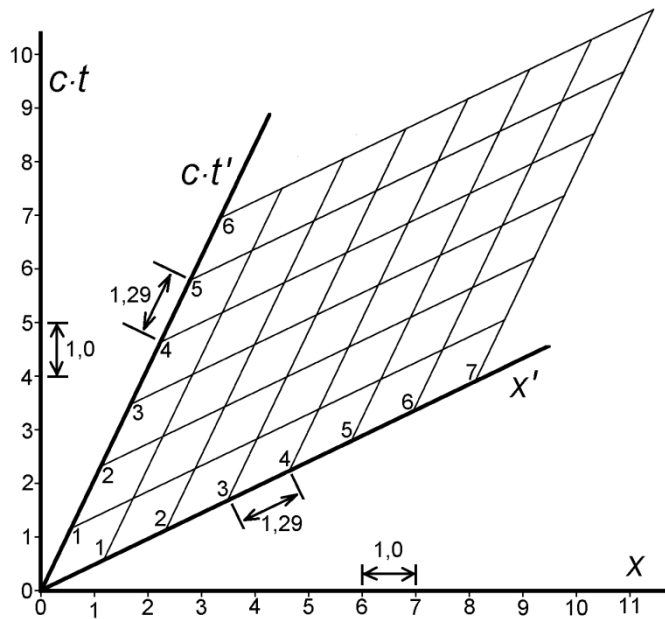
De schaalfactor kan als volgt uitgerekend worden.

$$\text{schaalfactor} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$$

Het bewijs van deze formule staat in de bijlage.

In de figuur is β gelijk aan 0,50 dus W' beweegt met de halve lichtsnelheid ten opzichte van W . Hieruit volgt:

$$\text{schaalfactor} = \sqrt{\frac{1+0,50^2}{1-0,50^2}} = 1,29$$



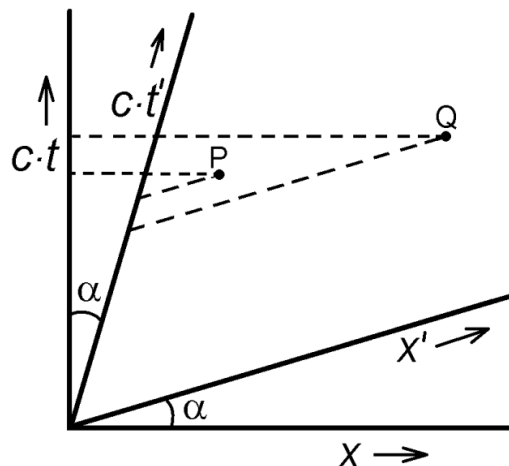
Opgaven bij § 7

Opgave 1

De volgorde van gebeurtenissen kan verschillend zijn van waarnemer tot waarnemer. In het minkowskidiagram hiernaast zijn twee gebeurtenissen P en Q aangegeven.

a. Welke gebeurtenis vindt volgens waarnemer W het eerste plaats?

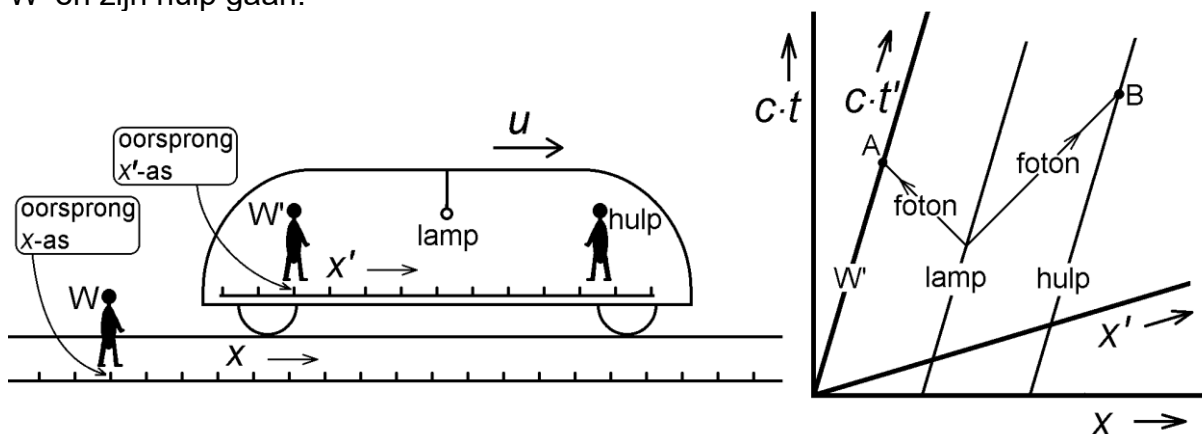
b. Welke gebeurtenis vindt volgens waarnemer W' het eerste plaats?



Opgave 2

In de onderstaande linker figuur staat waarnemer W op de grond en staat waarnemer W' in een trein die met een zeer grote snelheid u naar rechts rijdt. Beide waarnemers bevinden zich in het nulpunt van hun eigen plaatsas. Op het moment dat W en W' langs elkaar gaan, zetten zij hun tijd op nul.

In de trein staat niet alleen W' maar ook zijn hulp. Precies in het midden tussen W' en zijn hulp hangt een lamp aan het plafond. Op een bepaald moment zendt deze lamp een lichtflits in beide richtingen uit. Na korte tijd zullen W' en zijn hulp deze lichtflitsen ontvangen. In het onderstaande minkowskidiagram zijn de wereldlijnen van W', zijn hulp en de lamp getekend. Langs deze drie wereldlijnen geldt dus dat x' constant is. Ook zijn de wereldlijnen van de lichtflitsen (fotonen) getekend die van de lamp naar W' en zijn hulp gaan.



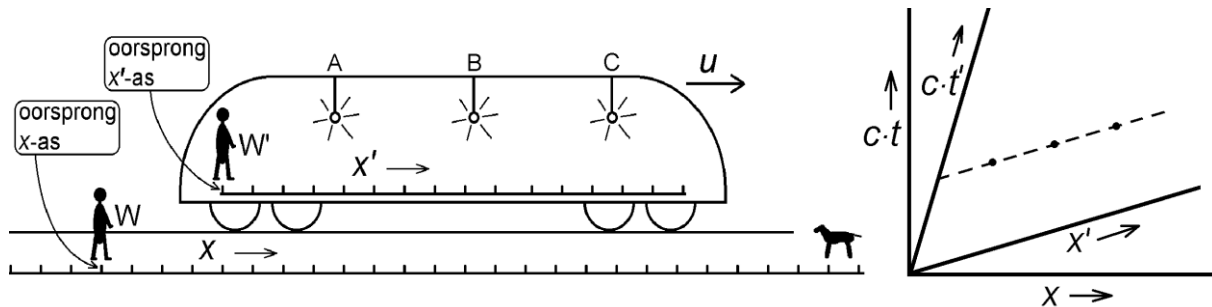
Bij gebeurtenis A bereikt het naar links gaande foton waarnemer W'. Bij gebeurtenis B bereikt het naar rechts gaande foton de hulp.

a. Laat in het minkowskidiagram met twee stippellijnen zien dat voor waarnemer W gebeurtenis A eerder plaatsvindt dan gebeurtenis B.

b. Laat in het minkowskidiagram met een stippelijlijn zien dat voor waarnemer W' de gebeurtenissen A en B gelijktijdig plaatsvinden.

Opgave 3

In de onderstaande figuur rijdt waarnemer W' in een trein met grote snelheid u langs waarnemer W . Als de oorsprong van W samenvalt met die van W' , zijn de tijden van beide waarnemers op nul gezet. In de trein hangen drie rotjes A, B en C aan het plafond. Nadat de oorsprong van W' de oorsprong van W gepasseerd is, laat W' deze op een bepaald tijdstip gelijktijdig ontploffen (althans voor W' gelijktijdig).



In het minkowskidiagram zijn de drie explosietjes als stippen weergegeven.

a.

Zet de juiste letters bij de stippen.

b.

Teken in het diagram de stippellijnen naar de ct -as om aan te geven op welke tijdstippen de explosietjes plaatsvinden voor waarnemer W .

In welke tijdsvolgorde verlopen de explosietjes voor W ?

In de tekening staat ook een hond langs de rails. Als de rotjes ontploffen, rijdt de trein nog in zijn richting.

c.

Zou de tijdsvolgorde voor de hond omgekeerd zijn vergeleken met die van waarnemer W ? Laat hierbij, zoals altijd, de looptijd van het licht naar de (ogen van de) hond buiten beschouwing. Leg je antwoord uit.

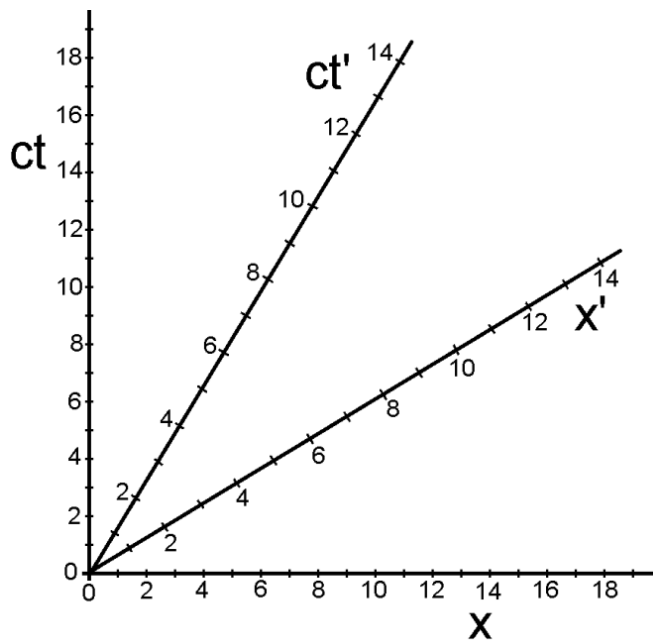
Tip: teken in het minkowskidiagram de wereldlijn van de hond en vat de hond op als waarnemer W'' (dus dubbel accent) die in het nulpunt van zijn eigen plaatsas staat. Dan is de getekende wereldlijn de ct'' -as. Herhaal vervolgens vraag b maar nu naar de nieuwe ct'' -as.

Opgave 4

Een sterrenstelsel beweegt met grote snelheid weg van ons eigen melkwegstelsel vandaan. Het begin van deze beweging vond bij de oerknal plaats, die 14 miljard jaar (afgerond) geleden plaats vond. In het minkowskidiagram hiernaast horen de assen zonder accent bij ons eigen melkwegstelsel en de assen met accent bij het (vreemde) sterrenstelsel.

a.

Bepaal met behulp van het diagram hoe oud het sterrenstelsel volgens hemzelf is in onze huidige tijd (dus bij $t = 14$ miljard jaar). Geef in het diagram met een stippellijn aan hoe je aan je antwoord komt.



Vanwege symmetrie is het (vreemde) sterrenstelsel volgens zijn eigen referentiestelsel ook 14 miljard jaar oud en is ons melkwegstelsel juist minder oud. b.

Bepaal met behulp van het diagram hoe oud ons melkwegstelsel volgens onszelf is in de huidige tijd van het vreemde sterrenstelsel (dus bij $t' = 14$ miljard jaar). Geef in het diagram met een stippellijn aan hoe je aan je antwoord komt.

Opgave 5

Deze opgave gaat over de zogenoemde 'ladderparadox'. Een ladder is even lang als een schuur (als ze ten opzichte van elkaar in rust zijn). Waarnemer W staat stil bij de schuur. Hardloper en tegelijkertijd waarnemer W' rent met een enorme snelheid (in de orde van de lichtsnelheid) door de schuur met de ladder onder zijn arm. Zie de onderstaande figuren. Voor waarnemer W is de ladder korter geworden en past nu gemakkelijk in de schuur. Hij zou de schuurdeuren zelfs heel even kunnen sluiten zonder schade te berokkenen. Waarnemer W' ziet echter dat de schuur korter is geworden en volgens hem past de ladder helemaal niet meer in de schuur!

In het minkowskidiagram onder de tekeningen horen de ct -as en x -as bij waarnemer W en de ct' -as en x' -as bij waarnemer W'. In het diagram zijn de wereldlijnen van de uiteinden van de ladder en van de schuurdeuropeningen getekend. Die van de ladder zijn met L_L en L_R aangeduid en die van de openingen van de schuur met S_L en S_R .

Volgens W is er een tijdstip waarop de ladder in de schuur past en precies evenveel speling bij de linker als bij de rechter deuropening heeft.

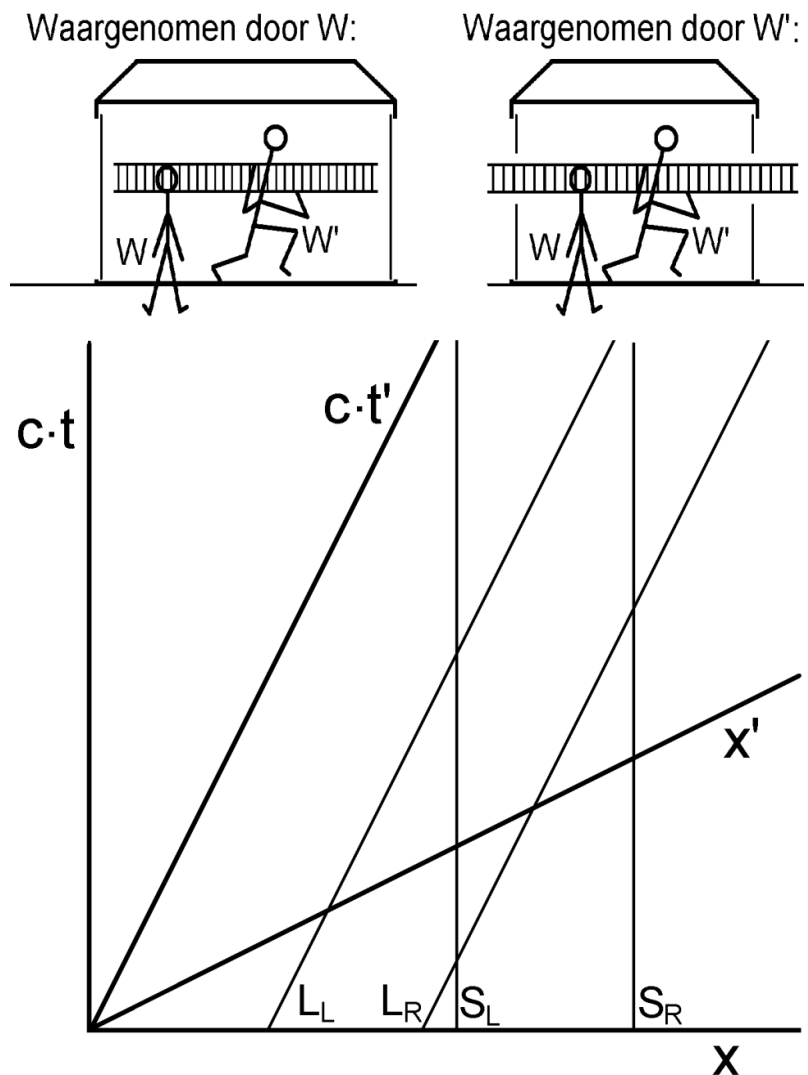
a.
Teken in het diagram de ladder in die situatie volgens W. Teken de ladder als een rechte streep.

Volgens W' is er een tijdstip waarop de ladder grotendeels binnen de schuur zit en evenveel aan de linker als aan de rechter kant uitsteekt.

b.
Teken in het diagram de ladder in die situatie volgens W'. Teken de ladder weer als een rechte streep.

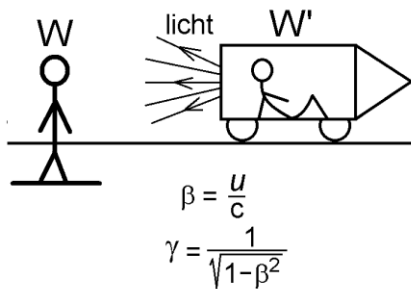
Als waarnemer W in de situatie, zoals geschetst bij opgave a, kortstondig beide deuren sluit, ondervindt de ladder geen schade.

c.
Hoe is dit te begrijpen vanuit het standpunt van waarnemer W'?



Opgave 6 (valt buiten de lesstof)

Deze opgave gaat over het dopplereffect bij licht. In de onderstaande figuur staat waarnemer W op de grond en beweegt waarnemer W' in zijn raket (op wielen) met hoge snelheid naar rechts. Aan de achterkant van de raket is een lichtbron gemonteerd waarvan het uitgezonden licht waarnemer W bereikt. Het licht heeft slechts één frequentie. Echter, de waarnemers W en W' zijn het oneens over deze frequentie.



W' zit in een raket die met snelheid u van W af beweegt. De raket zendt licht uit. In het referentiestelsel van W' worden in het tijdsinterval tussen 0 en t' een aantal lichtgolven uitgezonden. De bijbehorende frequentie is f_B (B van Bron). In het referentiestelsel van W worden deze lichtgolven ontvangen in het tijdsinterval tussen 0 en t . De bijbehorende frequentie is f_W (W van Waarnemen).

Het verband tussen t en t' wordt gegeven door:

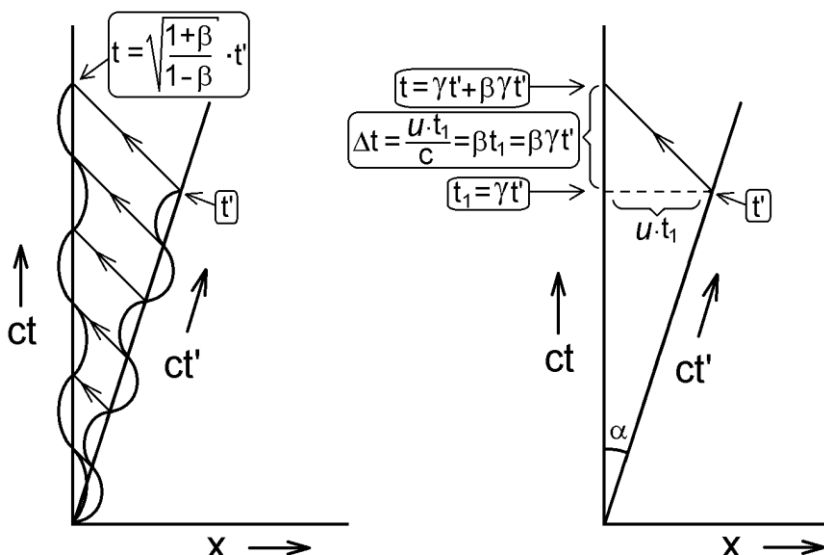
$$t = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot t'$$

Het verband tussen f_W en f_B is daarom:

$$f_W = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot f_B$$

Het bovenstaande proces is in het onderstaande linker minkowskidiagram weergegeven inclusief de tijden t en t' en het verband daartussen.

In het onderstaande rechter minkowskidiagram proberen we het verband tussen t en t' te bewijzen. Je kunt zien dat tijd t twee bijdragen heeft namelijk 1) tijdsduur t_1 (in het referentiestelsel van W) waarin W' de golven aan het uitzenden is en 2) tijdsduur Δt die de laatst uitgezonden golven nodig hebben om W te bereiken. We vinden dan $t = \gamma \cdot t' + \beta \gamma \cdot t'$.

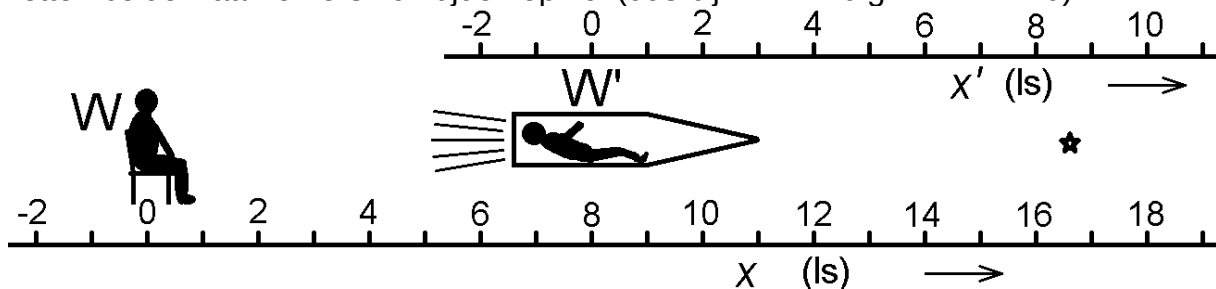


En nu eindelijk de vraag. Laat zien dat uit $t = \gamma \cdot t' + \beta \gamma \cdot t'$ het omkaderde verband tussen t en t' volgt.

§ 8 Lorentztransformatie

Lorentztransformatie van de coördinaten van een gebeurtenis

In de onderstaande figuur hebben de twee waarnemers W en W' ieder hun eigen plaatsas. Voor W is dat de x-as en voor W' is dat de x'-as. Waarnemer W' beweegt ten opzichte van waarnemer W met snelheid u in de richting van oplopende x (dus in de figuur naar rechts). Als de oorsprongen van beide plaatsassen samenvallen, zetten beide waarnemers hun tijden op nul (dus bij $x = x' = 0$ geldt $t = t' = 0$).



In de figuur stelt de ster een willekeurige gebeurtenis voor. Voor W zijn de coördinaten hiervan x en t . Voor W' zijn de coördinaten x' en t' . We kunnen de coördinaten voor W dan eenvoudig omrekenen naar die voor W' en andersom. Dit is mogelijk met de zogenoemde Lorentztransformaties. Deze transformaties krijgen de eenvoudigste (symmetrische) gedaante als overgestapt wordt van tijden (t en t') naar afstanden (ct en ct') door deze tijden met de lichtsnelheid te vermenigvuldigen. Dit werd ook al gedaan bij de tijdassen in het minkowskidiagram. De transformaties worden dan (zie de bijlage voor het bewijs):

Lorentz- transformatie van W naar W': $\begin{cases} x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot ct) \\ ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot x) \end{cases}$	Lorentz- transformatie van W' naar W: $\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + \beta \cdot ct') \\ ct = \gamma \cdot (ct' + \beta \cdot x') \end{cases}$
---	---

Hierbij geldt $\beta = \frac{u}{c}$ en $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ waarbij u de snelheid is van W' ten opzichte van W.

Opmerking

Als t (of t') gelijk is aan 1 seconde, dan is $c \cdot t$ (of $c \cdot t'$) gelijk aan 1 lichtseconde.

Als t (of t') gelijk is aan 1 jaar, dan is $c \cdot t$ (of $c \cdot t'$) gelijk aan 1 lichtjaar.

Als de lorentztransformatie gebruikt wordt, vormen de seconde en lichtseconde dus een geschikte combinatie van tijdseenheid en afstandseenheid. Evenzo zijn jaar en lichtjaar een geschikte combinatie.

Rekenvoorbeeld

Een ruimteschip (waarnemer W') passeert de aarde (waarnemer W) met 55% van de lichtsnelheid. Precies in de vliegrichting van het ruimteschip ontploft een object in de ruimte. Voor de aardbewoners vindt de ontploffing op een afstand van 66 lichtseconde plaats en 40 seconde na het passeren van het ruimteschip. Dus geldt: $x = 66$ ls en $ct = 40$ ls.

We kunnen nu berekenen op welke afstand de ontploffing plaats vindt voor de bemanning van het ruimteschip (dus x') en op welk tijdstip dit gebeurt (dus t'), gerekend vanaf het passeren van de aarde.

We moeten echter eerst de waarden van bèta en gamma berekenen. Zie de onderstaande berekeningen.

$$\beta = \frac{u}{c} = 0,55$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,55^2}} = 1,20$$

Nu kunnen we de lorentztransformatie van W naar W' toepassen. Zie de onderstaande berekeningen.

$$x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot ct) = 1,20 \cdot (66 - 0,55 \cdot 40) = 52,8 \text{ ls}$$

$$ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot x) = 1,20 \cdot (40 - 0,55 \cdot 66) = 4,4 \text{ ls}$$

Voor de bemanning van het ruimteschip vindt de ontploffing dus plaats op een afstand van 52,8 ls en 4,4 s na het passeren van de aarde.

Lorentztransformatie en het minkowskidiagram

In de figuur hiernaast is het minkowskidiagram getekend voor $\beta = 0,50$. In de figuur zijn twee gebeurtenissen A en B als stippen getekend.

Uit het minkowskidiagram blijkt dat de coördinaten van gebeurtenis A voor waarnemer W zijn: $x = 6,0$ ls en $ct = 4,0$ ls.

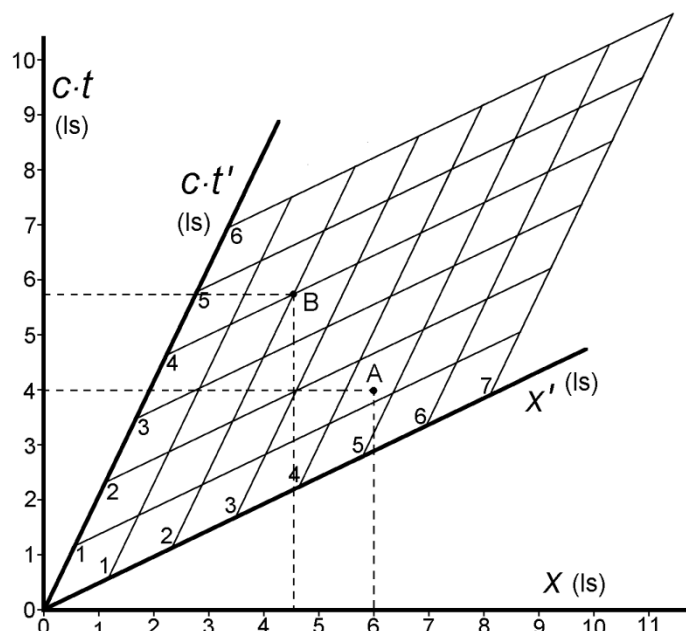
We kunnen de coördinaten van deze gebeurtenis voor waarnemer W' met de lorentztransformatie berekenen. Allereerst moeten we dan de lorentzfactor uitrekenen.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0,50^2}} = 1,15$$

Nu geldt voor gebeurtenis A:

$$x' = \gamma \cdot (x - \beta \cdot ct) = 1,15 \cdot (6,0 - 0,50 \cdot 4,0) = 4,6 \text{ ls}$$

$$ct' = \gamma \cdot (ct - \beta \cdot x) = 1,15 \cdot (4,0 - 0,50 \cdot 6,0) = 1,2 \text{ ls}$$



Ga na dat je deze resultaten ook kunt aflezen langs de schuine assen van het minkowskidiagram.

Uit het minkowskidiagram blijkt dat de coördinaten van gebeurtenis B voor waarnemer W' zijn: $x' = 2,0$ ls en $ct' = 4,0$ ls.

We kunnen de coördinaten van deze gebeurtenis voor waarnemer W met de lorentztransformatie berekenen. We krijgen dan:

$$x = \gamma \cdot (x' + \beta \cdot ct') = 1,15 \cdot (2,0 + 0,50 \cdot 4,0) = 4,6 \text{ ls}$$

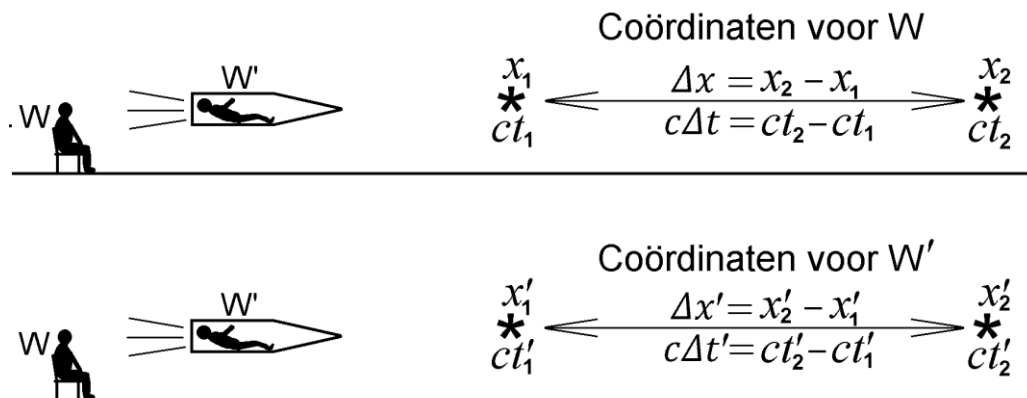
$$ct = \gamma \cdot (ct' + \beta \cdot x') = 1,15 \cdot (4,0 + 0,50 \cdot 2,0) = 5,7 \text{ ls}$$

Ga na dat je deze resultaten ook kunt aflezen langs de horizontale en verticale as van het minkowskidiagram.

Lorentztransformatie van het verschil van coördinaten (geen verplichte lesstof)

Hierboven werden de coördinaten van een gebeurtenis getransformeerd van de ene naar de andere waarnemer. Eigenlijk was er nog een tweede gebeurtenis namelijk die waarbij de waarnemers elkaar passeerden. Beter gezegd: waarbij de oorsprongen van hun plaatsassen samenvielen. De tijden van die gebeurtenis waren voor beide waarnemers ook nul (net als de plaatsen van die gebeurtenis).

We kunnen de bovenstaande lorentztransformatie eenvoudig veralgemeniseren naar het geval van TWEE willekeurige gebeurtenissen 1 en 2. In de onderstaande figuren zijn deze gebeurtenissen symbolisch als sterretjes weergegeven. In de bovenste figuur staan de coördinaten voor waarnemer W bij de sterretjes; in de figuur daaronder die voor waarnemer W'. Ook zijn de verschillen tussen de plaats- en tijdcoördinaten aangegeven. Voor waarnemer W zijn dat Δx en $c\Delta t$; voor waarnemer W' zijn dat $\Delta x'$ en $c\Delta t'$.

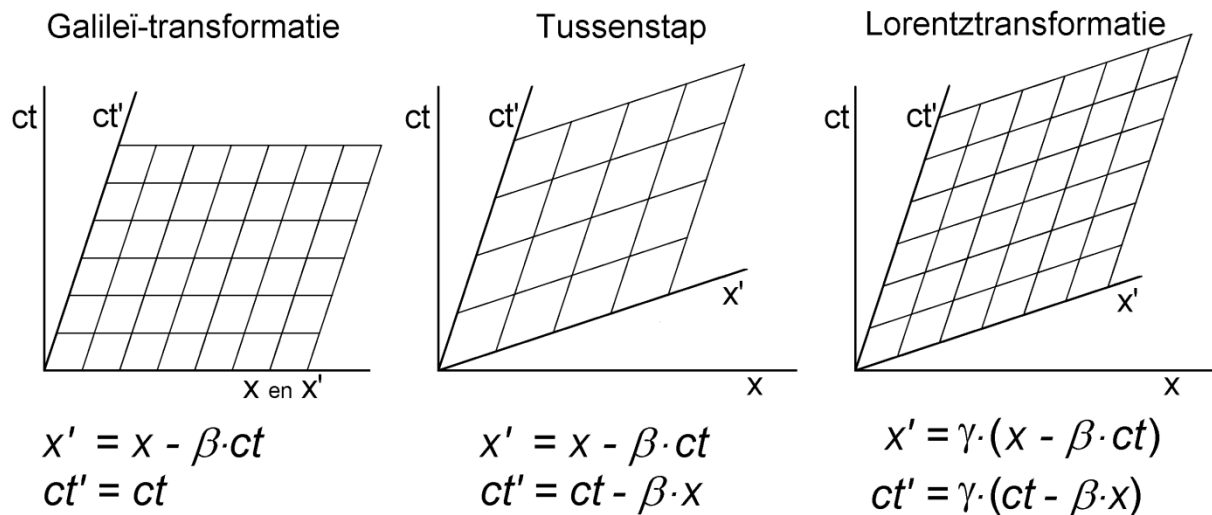


Omdat de lorentztransformatie lineair is, kunnen de coördinaatverschillen voor W met de lorentztransformatie omgezet worden naar de coördinaatverschillen voor W' en omgekeerd. Zie de vergelijkingen in het volgende kader.

Lorentz- transformatie van W naar W':	$\begin{cases} \Delta x' = \gamma \cdot (\Delta x - \beta \cdot c\Delta t) \\ c\Delta t' = \gamma \cdot (c\Delta t - \beta \cdot \Delta x) \end{cases}$	Lorentz- transformatie van W' naar W:	$\begin{cases} \Delta x = \gamma \cdot (\Delta x' + \beta \cdot c\Delta t') \\ c\Delta t = \gamma \cdot (c\Delta t' + \beta \cdot \Delta x') \end{cases}$
---	---	---	---

Het minkowskidiagram van klassiek naar relativistisch (geen verplichte lesstof)

Voor de komst van de relativiteitstheorie werd de galileï-transformatie gebruikt om de coördinaten van een gebeurtenis om te rekenen van waarnemer W naar waarnemer W' (en andersom). Voor hoge snelheden tussen de waarnemers voldoet de galileï-transformatie niet meer en moet de lorentztransformatie gebruikt worden. In twee stappen kan de galileï-transformatie worden aangepast om tot de lorentztransformatie te komen. Zie de volgende figuren.



Links staat de galileï-transformatie. De vergelijkingen $x' = x - u \cdot t$ en $t' = t$ uit paragraaf 1 zijn herschreven als

$$x' = x - \beta \cdot ct \quad \text{en} \quad ct' = ct.$$

In het minkowskidiagram vallen de x-as en x'-as nog samen.

In de eerste verbeterstap veranderen we de vergelijking

$$ct' = ct \quad \text{in} \quad ct' = ct - \beta \cdot x.$$

Door de extra term $-\beta \cdot x$ in het rechterlid hebben beide vergelijkingen precies dezelfde vorm gekregen en kantelt de x'-as in het minkowskidiagram. Zie het middelste diagram. De hoek tussen de x- en x'-as is gelijk aan de hoek tussen de ct- en ct'-as. Dit heeft tot gevolg dat de lichtsnelheid voor waarnemer W' gelijk wordt aan die voor waarnemer W. Dankzij deze extra term wordt dus aan het tweede postulaat (lichtsnelheid is invariant) voldaan.

Na de eerste verbeterstap is de transformatie helaas nog niet helemaal correct. In het minkowskidiagram is de afstand tussen de rasterlijnen namelijk te groot. In de middelste figuur is dat overdreven getekend. Door de extra vermenigvuldigingsfactor gamma (γ) in de vergelijkingen aan te brengen, krijgen we dan de lorentztransformatie. Hierdoor wordt de afstand tussen de rasterlijnen verkleind (zie het rechter minkowskidiagram). De lorentztransformatie is nu in overeenstemming met beide postulaten van de speciale relativiteitstheorie.

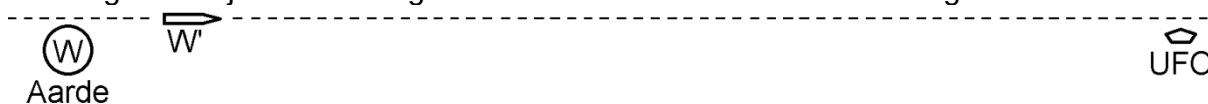
Opgaven bij § 8

Opgave 1

Met de lorentztransformatie van waarnemer W naar waarnemer W' kun je de coördinaten van een gebeurtenis voor W' uitrekenen uit de coördinaten voor W. De lorentztransformatie van W naar W' gaat over in de lorentztransformatie van W' naar W als je in de formule het minteken door een plusteken vervangt. Leg uit dat dit heel logisch is.

Opgave 2

Op een afstand van 4,4 lichtjaar van de aarde (= waarnemer W) bevindt zich een UFO (unidentified flying object). De UFO staat stil ten opzichte van de aarde. Een ruimteschip (= waarnemer W') passeert de aarde met 30% van de lichtsnelheid en beweegt daarbij in de richting van de UFO. Zie de onderstaande figuur.



In het aardse stelsel is er na het passeren van het ruimteschip 5,1 jaar verstreken als de UFO een signaal afgeeft.

a.

Bereken de waarde van β ($= u / c$) en de waarde van γ (= lorentzfactor).

b.

Bereken hoe lang het voor de bemanning van het ruimteschip heeft geduurd (gerekend vanaf het passeren van de aarde) voordat de UFO het signaal afgeeft. Gebruik daarbij de lorentztransformatie.

c.

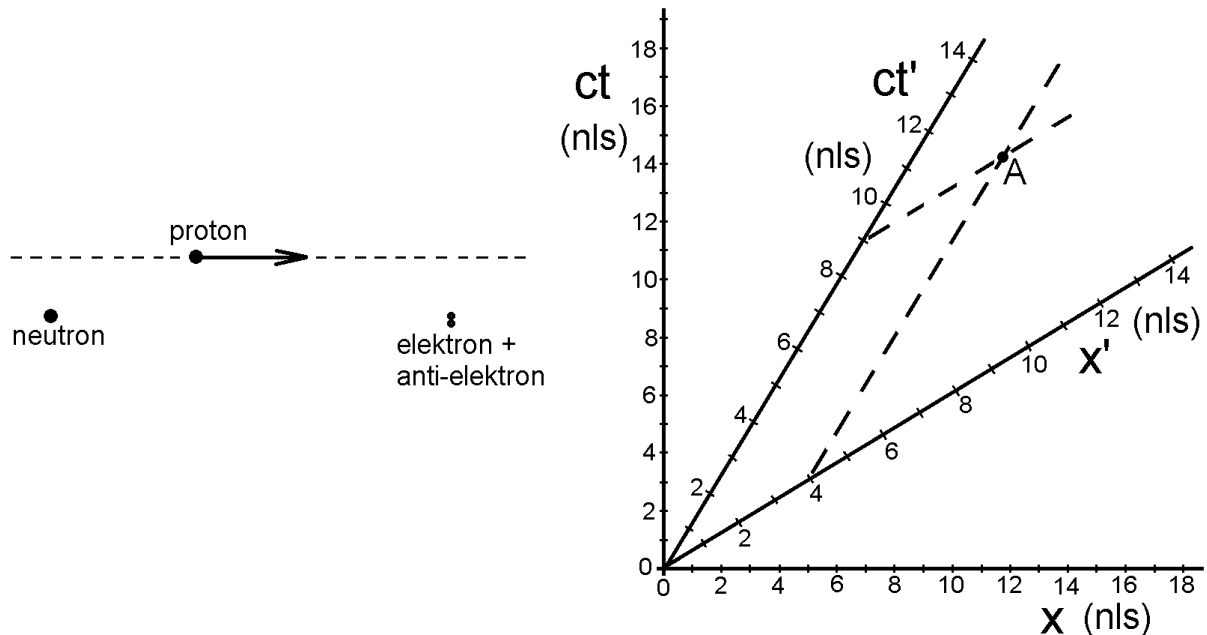
Leg uit waarom je bij het beantwoorden van vraag b. geen gebruik mag maken van de formule van de tijdsduurtek.

d.

Bereken voor de bemanning van het ruimteschip de afstand tot de UFO als deze het signaal afgeeft. Gebruik daarbij de lorentztransformatie.

Opgave 3

In een grote ruimte waarin vacuüm heerst beweegt een proton met grote snelheid langs een neutron. Zie de onderstaande linker figuur. Op het moment van passeren begint voor beiden de tijd te lopen. In het minkowskidiagram (rechts) horen de assen zonder accent bij het neutron en de assen met accent bij het proton.



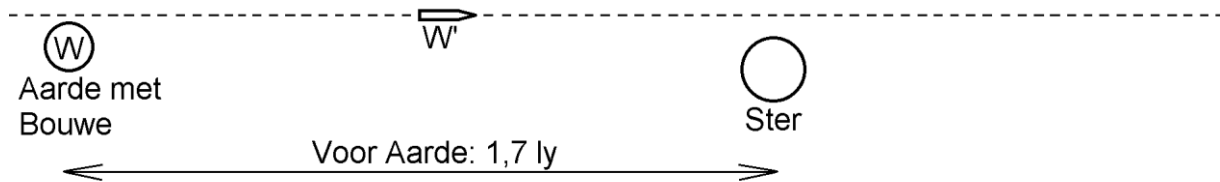
- Meet in het diagram de hoek tussen beide tijdassen of tussen beide plaatsassen.
- Toon aan dat de snelheid van het proton ten opzichte van het neutron 60% van de lichtsnelheid is.
- Bepaal de lorentzfactor γ .

In het referentiestelsel van het proton botsen na 9 ns op een afstand van 4 nls in de bewegingsrichting een elektron en een anti-elektron (positron) op elkaar en worden dan omgezet in twee gammafotonen. Deze gebeurtenis is in het diagram met de letter A aangegeven.

- Bereken met de lorentztransformatie de twee coördinaten van gebeurtenis A in het referentiestelsel van het neutron. Ga vervolgens na of dit klopt met de afgelezen waarden in het diagram.

Opgave 4

Een raket vliegt langs de aarde en gaat in een rechte lijn met 64% van de lichtsnelheid in de richting van een ster. Uiteindelijk passeert de raket deze ster. De ster staat stil ten opzichte van de aarde op een afstand van 1,7 ly (lichtjaren). Zie de onderstaande figuur.



Op het moment dat de raket de aarde passeert, worden de klokken in de raket en op aarde op nul gezet. Als op aarde 5,2 jaren verstreken zijn sinds het voorbij komen van de raket, ontploft de ster.

a.

Hoeveel jaar nadat de raket langs de aarde is gevlogen ziet Bouwe, die zich op aarde bevindt en met zijn telescoop naar de ster kijkt, dat de ster ontploft? Denk hierbij aan het feit dat het licht tijd nodig heeft om van de (ontploffende) ster naar de aarde te gaan.

b.

Bereken de waarde van gamma (γ) in de bovenstaande situatie.

c.

Bereken het tijdstip waarop de ontploffing plaatsvindt volgens de bemanning van de raket.

d.

Bereken hoe ver de ster tijdens de ontploffing afstaat van de raket volgens de bemanning van de raket. Leg uit of de ster voor of achter de raket ontploft.

Opgave 5

Een sterrenstelsel beweegt met 50% van de lichtsnelheid ten opzichte van de aarde. Het begin van deze beweging vond bij de oerknal plaats, wat 14 miljard jaar (afgerond) geleden was. In het onderstaande minkowskidiagram is grootte t de tijd op aarde sinds de oerknal ($t = 0$) en grootte x de afstand tot de aarde.

a.

Teken in het diagram de wereldlijn van dit sterrenstelsel. Schrijf berekeningen hieronder op.

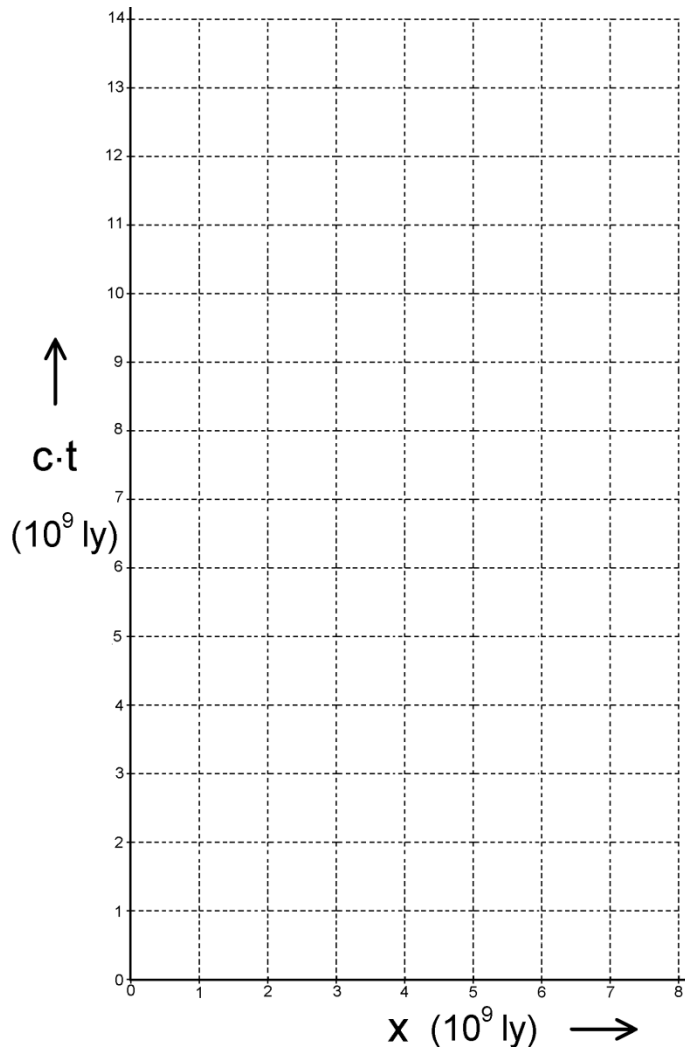
b.

De bij a. getekende wereldlijn snijdt de bovenste rasterlijn ($ct = 14 \cdot 10^9 \text{ ly}$).

Bereken bij dit snijpunt de leeftijd (in jaar) van het sterrenstelsel in zijn eigen referentiestelsel. Gebruik daarbij de formule van de tijdsduurtek. De tijd van het sterrenstelsel loopt vanuit de aarde gezien namelijk langzamer. Schrijf de leeftijd bij het snijpunt.

c.

Herhaal opdracht b, maar nu door gebruik te maken van de lorentztransformatie.



Als wij nu een foto van dit sterrenstelsel maken, zijn de fotonen lang geleden vertrokken van het sterrenstelsel.

d.

Teken de wereldlijn van de fotonen die van het sterrenstelsel vertrekken en nu bij de aarde aankomen.

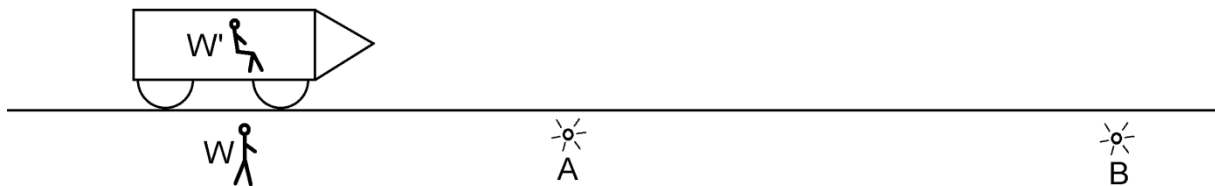
e.

Bepaal uit het diagram de leeftijd van het sterrenstelsel zoals dat op de foto staat.

§ 9 Ruimtetijdinterval

Ruimtetijdinterval

In de onderstaande figuur staat waarnemer W langs de kant van de weg. Waarnemer W' rijdt in zijn racewagen op de weg en passeert W. Langs de weg vinden twee gebeurtenissen A en B plaats zoals het exploderen van twee granaten of twee (rennende) honden die ieder één keer blaffen. Waarnemers W en W' zijn het dan niet eens over de tijdsduur tussen A en B. Evenmin zijn zij het eens over de afstand tussen A en B. In symbolen geldt dus: $\Delta t \neq \Delta t'$ en $\Delta x \neq \Delta x'$.



Waarnemers W en W' zijn het echter wel eens over het zogenoemde 'kwadraat van het ruimtetijdinterval' tussen A en B. Onder dit kwadraat s^2 van het ruimtetijdinterval tussen twee gebeurtenissen A en B verstaan we:

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$$

We kunnen dus schrijven:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

Na de lichtsnelheid is het kwadraat van het ruimtetijdinterval tussen twee gebeurtenissen de tweede grootheid die in de relativiteitstheorie absoluut is. Ruimte en tijd zijn beiden relatief, maar het kwadraat van het ruimtetijdinterval niet. We zeggen dat de lichtsnelheid en het kwadraat van het ruimtetijdinterval "invariant" zijn. In de bijlage wordt dit bewezen. In het woord ruimtetijdinterval zit het woord ruimtetijd. Dit laatste woord wordt gebruikt als waarnemers W en W' een grote snelheid ten opzichte van elkaar hebben en begrippen ruimte en tijd met elkaar verweven zijn.

Merk op dat in de laatste formule de snelheid u van waarnemer W' ten opzichte van waarnemer W niet voorkomt. In de formules van alle voorgaande paragrafen was dit wel steeds het geval.

Opmerking

In het algemeen geldt het volgende. Als een combinatie van twee grootheden a en b via de lorentztransformatie overgaat van de ene waarnemer naar de andere waarnemer, dan is de grootheid $a^2 - b^2$ invariant. In deze paragraaf is a gelijk aan $c\Delta t$ en b gelijk aan Δx . Verderop in de relativiteitstheorie (die hier niet wordt behandeld) is a gelijk aan E (= de energie van een deeltje) en b gelijk aan pc (= de impuls van het deeltje keer de lichtsnelheid). Daardoor is $E^2 - p^2 c^2$ automatisch ook invariant.

Getallenvoorbeeld

Twee rotjes ontploffen. Volgens de ene waarnemer is het tijdsverschil tussen beide ontploffingen 60 ns (nanoseconden) op een onderlinge afstand van 40 nls (nanolichtseconden). Volgens een andere waarnemer bedraagt de onderlinge afstand tussen beide ontploffingen 50 nls. De tijd tussen beide ontploffingen in dit stelsel kan als volgt berekend worden.

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2$$

$$60^2 - 40^2 = c^2 \Delta t'^2 - 50^2$$

$$c^2 \Delta t'^2 = 4500$$

$$c \Delta t' = 67 \text{ nls}$$

De tijd tussen beide ontploffingen volgens de andere waarnemer is dus 67 ns.

Ruimtetijdinterval in een minkowskidiagram

In het hiernaast afgebeelde minkowskidiagram staan twee gebeurtenissen A en B aangegeven. De gebeurtenissen worden waargenomen door waarnemer W en door waarnemer W'.

Voor waarnemer W geldt:

$$c \cdot \Delta t = 8,0 - 3,5 = 4,5$$

$$\Delta x = 9,1 - 3,4 = 5,7$$

Voor het kwadraat van het ruimtetijdinterval geldt dan volgens waarnemer W (afgerond):

$$s^2 = 4,5^2 - 5,7^2 = -12.$$

Ga dit na!

Voor waarnemer W' geldt:

$$c \cdot \Delta t' = 4,0 - 2,0 = 2,0$$

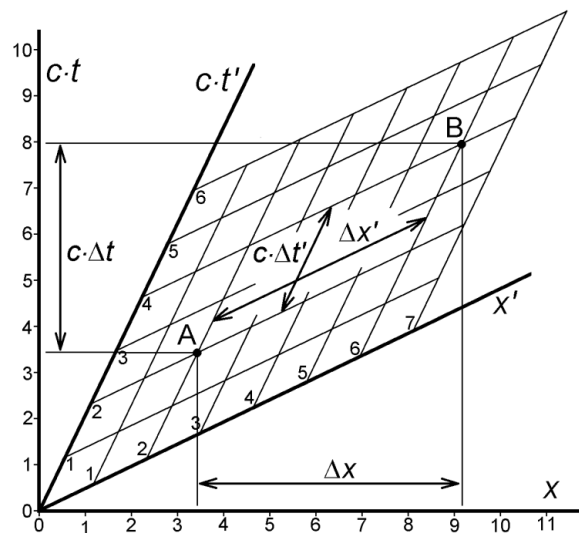
$$\Delta x' = 6,0 - 2,0 = 4,0$$

Voor het kwadraat van het ruimtetijdinterval geldt dan voor waarnemer W':

$$s^2 = 2,0^2 - 4,0^2 = -12.$$

Ga dit weer na!

Het kwadraat van het ruimtetijdinterval is dus voor beide waarnemers hetzelfde, namelijk -12.

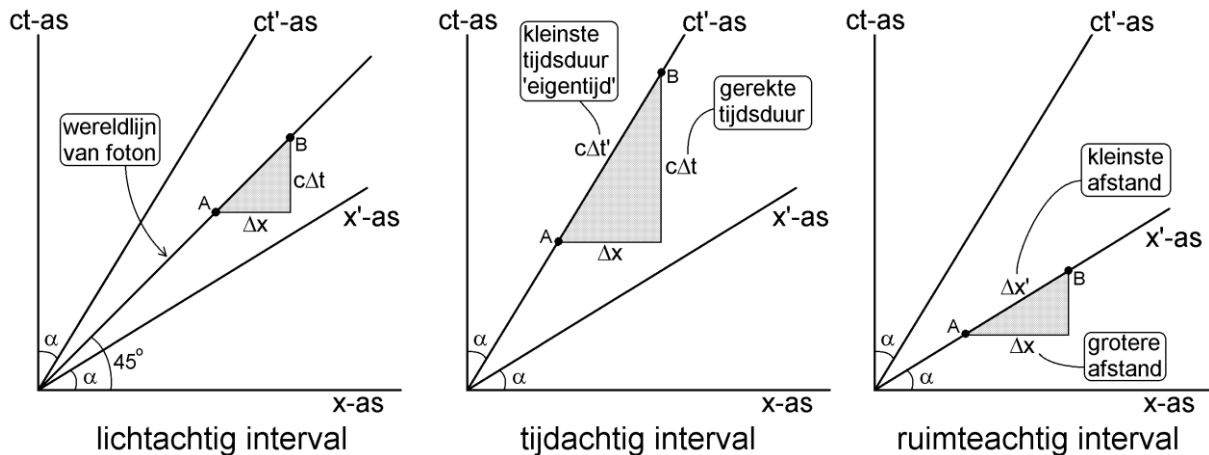


Betekenis van het teken van het kwadraat van het ruimtetijdinterval

Zoals we weten geldt voor het kwadraat van het ruimtetijdinterval tussen twee gebeurtenissen A en B:

$$s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2.$$

Er zijn nu drie soorten intervallen mogelijk, namelijk een lichtachtig interval, een tijdachtig interval en een ruimteachtig interval. Zie ook de onderstaande figuur.



Lichtachtig interval: s^2 is nul

Als s^2 nul is, spreken we van een lichtachtig interval. Tijdsduur Δt is precies zo groot, dat het licht in deze tijd afstand Δx tussen A naar B kan overbruggen. Zie het bovenstaande linker minkowskidiagram. Beide gebeurtenissen liggen op een wereldlijn van een foton.

Tijdachtig interval: s^2 is positief

Als s^2 positief is, spreken we van een tijdachtig interval. De tijdsduur tussen A en B is dan voldoende groot ten opzichte van de afstand hiertussen, dat A en B elkaars oorzaak en gevolg kunnen zijn (in theorie althans). Het licht kan de afstand tussen A en B binnen de tijdsduur tussen A en B namelijk meer dan overbruggen. Er is altijd een waarnemer W' met de juiste snelheid te vinden voor wie beide gebeurtenissen op dezelfde locatie plaatsvinden. Van alle waarnemers zal hij de kortste tijdsduur $\Delta t'$ tussen de gebeurtenissen meten omdat $\Delta x'$ nul is. We noemen deze $\Delta t'$ de eigentijd. Zie het bovenstaande middelste minkowskidiagram. Beide gebeurtenissen A en B liggen op de ct' -as. Waarnemer W meet een grotere tijdsduur Δt tussen A en B.

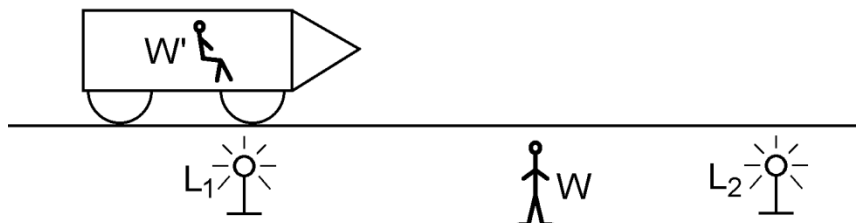
Ruimteachtig interval: s^2 is negatief

Als s^2 negatief is, spreken we van een ruimteachtig interval. De afstand tussen A en B is dan zo groot ten opzichte van de tijdsduur hiertussen, dat A en B nooit oorzaak en gevolg van elkaar kunnen zijn. Er is altijd een waarnemer W' met de juiste snelheid te vinden voor wie beide gebeurtenissen gelijktijdig plaatsvinden. Van alle waarnemers zal hij de kleinste afstand $\Delta x'$ tussen de gebeurtenissen meten omdat $\Delta t'$ nul is. Zie het bovenstaande rechter minkowskidiagram. Beide gebeurtenissen A en B liggen nu op de x' -as. Waarnemer W meet een grotere afstand Δx tussen A en B.

Opgaven bij § 9

Opgave 1

In de onderstaande figuur staan twee lampen L_1 en L_2 op de grond. Iedere lamp geeft een lichtflits. Voor waarnemer W , die ook op de grond staat, worden de lichtflitsen gelijktijdig afgegeven en is de afstand tussen de lampen 20 nls (20 nanolichtseconde).



Waarnemer W' rijdt met een enorme snelheid langs de lamp. Voor hem is de afstand tussen lamp L_1 op het moment dat hij flitst en lamp L_2 op het moment dat hij flitst 30 nls.

a.

Schrijf achter de volgende grootheden de bijbehorende waarden.

$$c^2\Delta t^2 = \dots\dots\dots \quad \Delta x^2 = \dots\dots\dots \quad \Delta x'^2 = \dots\dots\dots$$

b.

Bereken voor W' de tijdsduur tussen beide flitsen.

Opgave 2

Een raket vliegt met een enorme snelheid van de aarde weg. In de vliegrichting van de raket ontploffen twee sterren. Voor de bemanning van de raket is de afstand tussen de eerste ontploffing en de tweede ontploffing 200 ls en ontploft de achterste ster 120 s later dan de voorste ster. In het aardse stelsel is de tijd tussen de ontploffingen 100 s.

a.

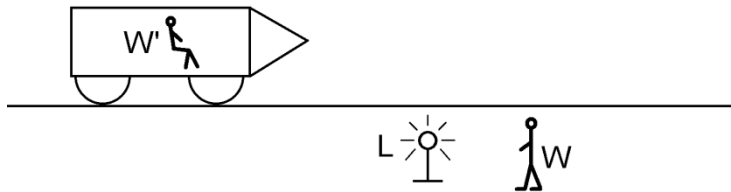
Bereken voor het aardse stelsel de afstand tussen de ontploffingen.

b.

Is de waarde van $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ positief of negatief? Kan de ontploffing van de ene ster dus de oorzaak zijn van de ontploffing van de andere ster?

Opgave 3

In de onderstaande figuur staat lamp L op de grond en geeft twee lichtflitsen. Voor waarnemer W, die ook op de grond staat, is de tijdsduur tussen de twee flitsen 1,0 s.

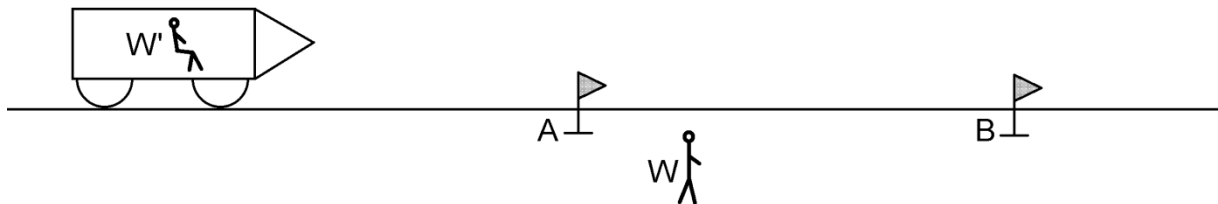


Waarnemer W' rijdt met een enorme snelheid langs de lamp. Voor hem is de tijd tussen twee flitsen 2,0 s.

Bereken voor W' de afstand (uitgedrukt in ls) tussen de lamp bij de eerste flits en de lamp bij de tweede flits.

Opgave 4

In de onderstaande figuur rijdt waarnemer W' in zijn rijdende raket met een constante maar zeer hoge snelheid u op een weg. Hij passeert eerst vlag A en daarna vlag B. Waarnemer W kijkt vanaf de zijlijn toe. We beschouwen het passeren van vlag A als eerste gebeurtenis en het passeren van vlag B als tweede gebeurtenis.



Voor waarnemer W is de afstand tussen beide vlaggen 40 nls. Voor hem (W dus) heeft de raket 60 ns nodig om van vlag A naar vlag B te gaan.

a.

Bereken met behulp van het kwadraat van het ruimtetijdinterval hoe lang het voor waarnemer W' duurt om van vlag A naar vlag B te gaan.

b.

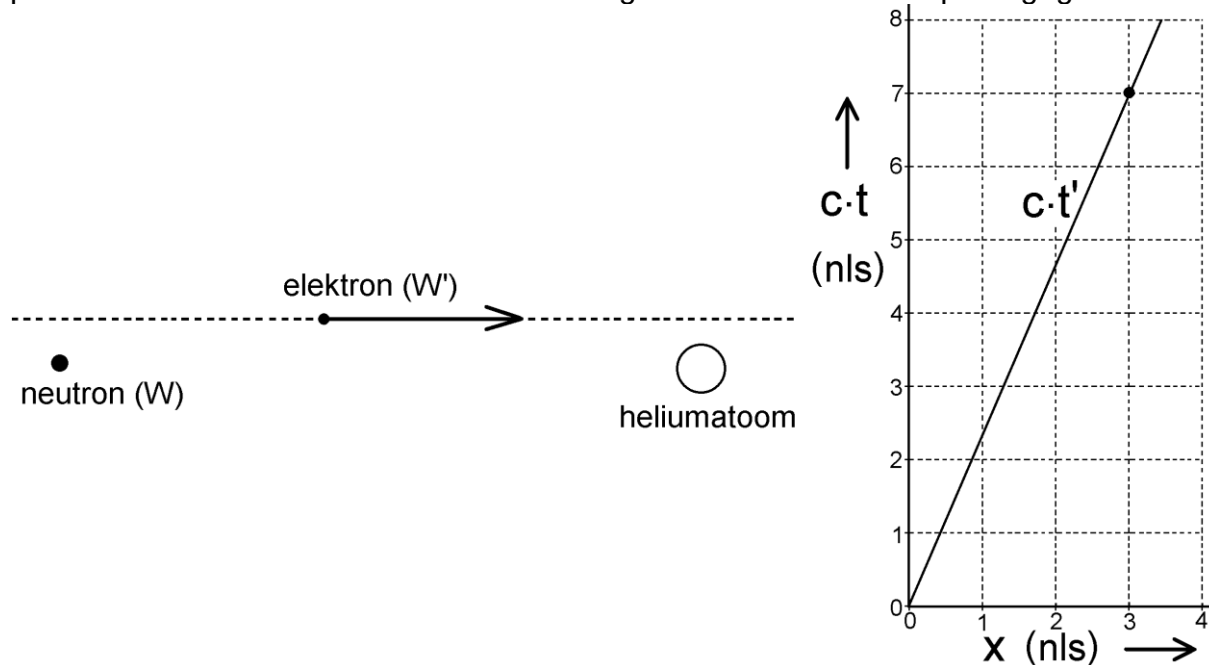
Toon met behulp van $u = \Delta x / \Delta t$ aan dat de snelheid van W' ten opzichte van W gelijk is aan $0,667 \cdot c$.

c.

Bereken de bij a. gevraagde tijdsduur nogmaals uit maar nu door gebruik te maken van tijdsduurrek. Reken dus eerst β en γ uit.

Opgave 5

In de onderstaande figuur beweegt een elektron met hoge snelheid langs een neutron en even later langs een heliumatoom. Waarnemer W heeft het neutron als oorsprong en waarnemer W' het elektron. De klokken van W en W' staan op nul als hun oorsprongen samenvallen. In het minkowskidiagram horen de ct-as en x-as bij het neutron (bij W dus). De schuine lijn is de wereldlijn van het elektron. Het passeren van het heliumatoom is in het diagram met een dikke stip aangegeven.



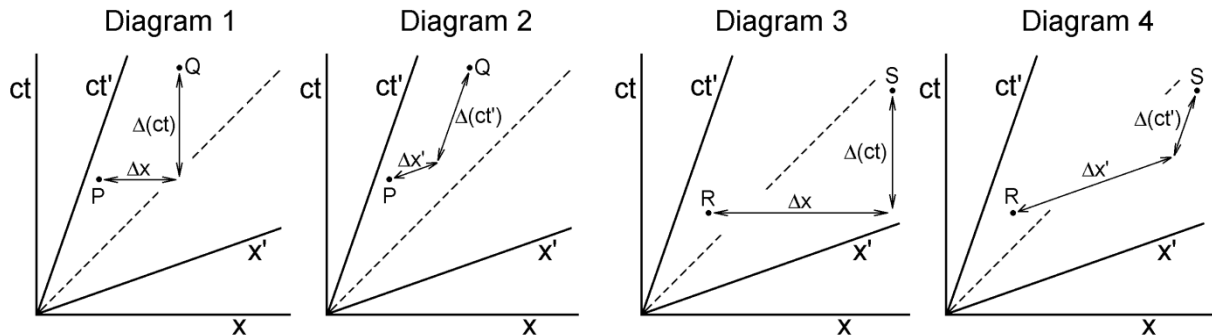
- a.
Toon aan dat de snelheid van het elektron ten opzichte van het neutron $0,429 \cdot c$ bedraagt.

In het referentiestelsel van het neutron (W) passeert het elektron het heliumatoom op tijdstip 7,0 ns. In deze opgave berekenen we op drie manieren het tijdstip waarop het elektron in zijn eigen referentiestelsel (W') het heliumatoom passeert.

- b.
Doe dit met behulp van tijdsduurrek.
- c.
Doe dit met behulp van de lorentztransformatie.
- d.
Doe dit met behulp van het ruimtetijdinterval.

Opgave 6

In de onderstaande minkowskidiagrammen 1 en 2 zijn twee gebeurtenissen P en Q aangegeven. In de minkowskidiagrammen 3 en 4 zijn twee gebeurtenissen R en S aangegeven. In diagrammen 1 en 3 zijn de coördinaatverschillen voor waarnemer W aangegeven en in diagrammen 2 en 4 de coördinaatverschillen voor waarnemer W'.



a.
Is het kwadraat van het ruimtetijdinterval tussen de gebeurtenissen P en Q positief of negatief? Kan gebeurtenis P gebeurtenis Q hebben veroorzaakt?

b.
Is het kwadraat van het ruimtetijdinterval tussen de gebeurtenissen R en S positief of negatief?
Kan gebeurtenis R gebeurtenis S hebben veroorzaakt?

We spreken van een 'causaal verband' tussen twee gebeurtenissen als de ene gebeurtenis de andere heeft veroorzaakt.

c.
Hoe kun je in het minkowskidiagram zien of er mogelijk een causaal verband tussen twee gebeurtenissen is?

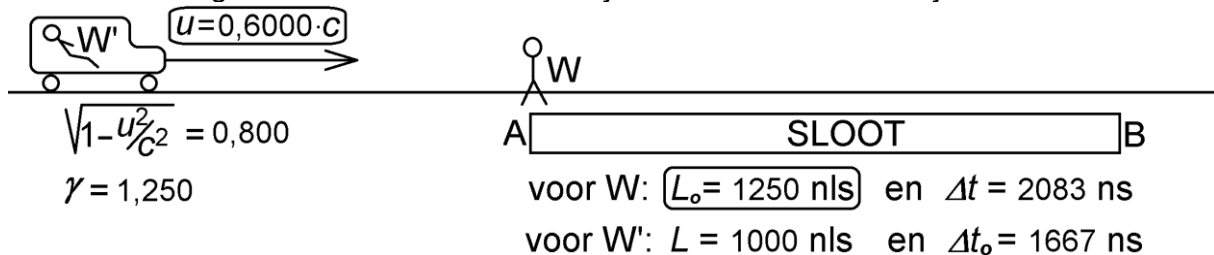
Opgave 7 KORTE HERHALING VAN ALLE BEHANDELDE FORMULES

In de onderstaande figuur staat waarnemer W langs de kant van de weg bij het begin van een lange sloot. Waarnemer W' rijdt in zijn auto met hoge snelheid u langs de sloot. Het beginpunt van de sloot is met A aangeduid en het eindpunt met B. Er is sprake van twee gebeurtenissen namelijk 1) de auto rijdt langs punt A en 2) de auto rijdt langs punt B.

De lengte van de sloot is een relatief begrip. Dat wil zeggen dat hij voor W en W' verschillend is. Hetzelfde geldt voor de tijdsduur tussen beide gebeurtenissen. Om verwarring te voorkomen, spreken we het volgende af.

De sloot heeft voor W lengte L_0 en voor W' lengte L .

Tussen beide gebeurtenissen zit voor W tijdsduur Δt en voor W' tijdsduur Δt_0 .



a. Leg kort uit waarom de lengte van de sloot voor W (en niet voor W') de eigenlengte is.

b. Leg kort uit waarom de tijd tussen beide gebeurtenissen voor W' (en niet voor W) de eigentijd is.

In deze opgave zijn twee grootheden gegeven namelijk 1) $u = 60\%$ van de lichtsnelheid en 2) $L_0 = 1250 \text{ nls}$. Deze gegevens zijn omlijnd met een kadertje. De overige grootheden kunnen hieruit berekend worden. De uitkomsten hiervan staan reeds in de figuur. Opdracht vooraf: ga na dat de lorentzfactor γ gelijk is aan 1,250.

c. Bereken de lengte L van de sloot (dus voor W') met de formule voor lengtekrimp.

d. Bereken Δt (dus voor W) met "tijdsduur = afstand gedeeld door snelheid".

We gaan nu op VIER VERSCHILLENDE MANIEREN de tijdsduur Δt_0 berekenen.

e. Bereken Δt_0 (dus voor W') met "tijdsduur = afstand gedeeld door snelheid".

f. Bereken Δt_0 (dus voor W') uit Δt met de formule voor de tijdsduurrek.

g. Bereken Δt_0 (dus voor W') met gebruikmaking van de lorentztransformatie.

h. Bereken Δt_0 (dus voor W') met gebruikmaking van het ruimtetijdinterval.

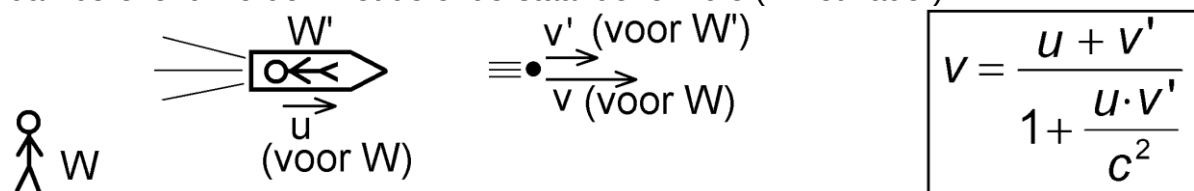
§ 10 Snelheden relativistisch optellen

Optellen van snelheden

Stel je de volgende situatie voor. Job staat langs de kant van de weg en ziet Klaas voorbij fietsen met een snelheid van 15 km/h. Klaas heeft een bal in zijn hand en gooit deze met een snelheid van 10 km/h naar voren. Voor Job gaat de bal dan met 25 km/h naar voren.

Dit principe dat je de snelheden gewoon bij elkaar kunt optellen, geldt niet meer als de snelheden in de orde van grootte van de lichtsnelheid zijn. Neem het volgende geval. Stel dat een ruimteschip langs de aarde vliegt met een snelheid van $0,6 \cdot c$ en dat het ruimteschip een raket in zijn vliegrichting afvuurt met een snelheid van $0,5 \cdot c$. Is de snelheid van de raket ten opzichte van de aarde dan $0,6 \cdot c + 0,5 \cdot c = 1,1 \cdot c$? Het antwoord is nee! We zullen hierna zien dat deze snelheid 'slechts' $0,85 \cdot c$ bedraagt. De snelheid van een voorwerp kan namelijk nooit groter dan de lichtsnelheid zijn.

In de onderstaande figuur beweegt waarnemer W' ten opzichte van waarnemer W naar rechts met snelheid u . Voor waarnemer W' beweegt een voorwerp naar rechts met snelheid v' . De snelheid v van het voorwerp ten opzichte van waarnemer W kan dan berekend worden met de onderstaande formule (in het kader).



In het bovenstaande voorbeeld is de snelheid van de raket voor de aardbewoners dan:

$$v = \frac{0,6 \cdot c + 0,5 \cdot c}{1 + \frac{0,6 \cdot c \cdot 0,5 \cdot c}{c^2}} = 0,85 \cdot c$$

Speciale gevallen

Als de snelheden u en v' veel kleiner dan de lichtsnelheid zijn, is de noemer van de breuk bij benadering 1 en gaat de formule over in de eenvoudige formule:

$$v = u + v'$$

Deze formule is van toepassing op het bovenstaande voorbeeld van Job en Klaas.

Een tweede speciaal geval treedt op als waarnemer W' een lichtstraal in zijn bewegingsrichting uitzendt. Dan geldt dus $v' = c$. Volgens de formule voor het optellen van snelheden is de snelheid van het licht voor waarnemer W gelijk aan:

$$v = \frac{u + c}{1 + \frac{u \cdot c}{c^2}} = \frac{u + c}{1 + \frac{u}{c}} = c$$

Dus voor zowel waarnemer W als voor waarnemer W' is de snelheid van het licht gelijk namelijk c . Dit is in overeenstemming met het tweede postulaat van de speciale relativiteitstheorie.

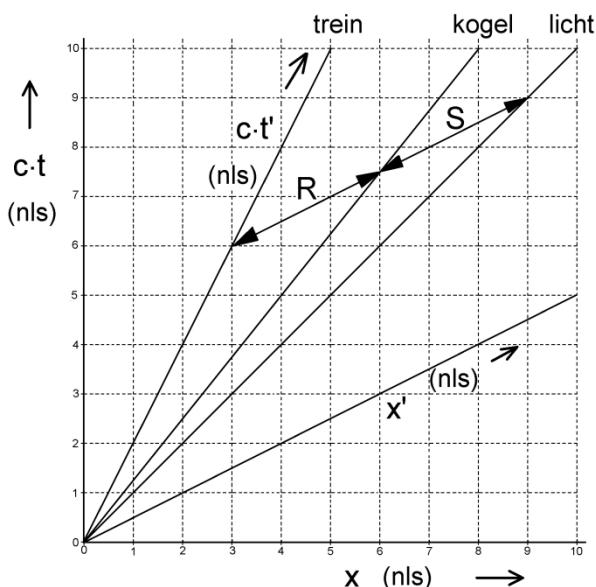
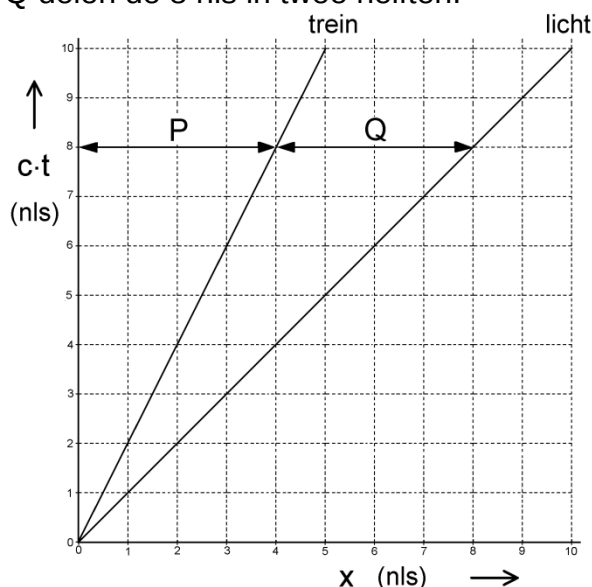
Voorbeeld met negatieve snelheid

Een UFO (unidentified flying object) beweegt met $0,6 \cdot c$ langs de aarde. Tijdens zijn vlucht schiet hij een kogel af met een snelheid van $0,5 \cdot c$ naar achteren. De snelheid van de kogel voor de aardbewoners is:

$$v = \frac{0,6 \cdot c - 0,5 \cdot c}{1 - \frac{0,6 \cdot c \cdot 0,5 \cdot c}{c^2}} = 0,14 \cdot c$$

Optellen van snelheden in het minkowskidiagram

Laten we uitgaan van de volgende situatie. Een trein rijdt met de halve lichtsnelheid over de rails en naast de rails staat waarnemer W. Voor W ziet het minkowskidiagram er dan uit zoals hieronder links is getekend. In dezelfde tijdsduur legt licht een twee keer zo grote afstand af als de trein. In het diagram heeft licht in 8 ns een afstand van 8 nls afgelegd en de trein een afstand van 4 nls. De pijlen P en Q delen de 8 nls in twee helften.



Stel nu dat iemand in de rijdende trein een kogel in de rijrichting afvuurt en dat de kogel de halve lichtsnelheid (ten opzichte van de trein) heeft. In het referentiestelsel van de trein (met accenten dus) legt het licht in dezelfde tijdsduur dan een twee keer zo grote afstand af als de kogel. Dit is in het rechter diagram getekend. De pijlen R en S delen de afstand die het licht aflegt, in twee helften.

Uit het rechter diagram blijkt dat de snelheid van de kogel ten opzichte van waarnemer W, die naast de rails staat, een snelheid heeft van $0,8 \cdot c$. In 10 ns legt de kogel namelijk 8 nls af. De conclusie is dus dat je hoge snelheden niet algebraïsch bij elkaar kunt optellen. In ons voorbeeld is $0,5 \cdot c$ plus $0,5 \cdot c$ dus geen $1,0 \cdot c$ maar $0,8 \cdot c$. We kunnen dit nog even met de bovenstaande formule controleren.

$$v = \frac{0,5 \cdot c + 0,5 \cdot c}{1 + \frac{0,5 \cdot c \cdot 0,5 \cdot c}{c^2}} = 0,8 \cdot c$$

Klopt!

Bewijs van de formule (valt buiten de lesstof)

Uitgangspunt is de definitie van snelheid:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \text{ en } v' = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}$$

Voor x en t geldt de lorentztransformatie (enigszins anders geschreven).

$$x = \gamma \cdot x' + \gamma \cdot u \cdot t'$$

$$t = \gamma \cdot t' + \gamma \cdot \frac{u}{c^2} \cdot x'$$

Als we deze formules in de definitie van v substitueren en vervolgens teller en noemer door γ delen, krijgen we:

$$v = \frac{(x'_2 + u \cdot t'_2) - (x'_1 + u \cdot t'_1)}{(t'_2 + k \cdot x'_2) - (t'_1 + k \cdot x'_1)}$$

Hierin is $k = u/c^2$

Na herschrijven van de teller en noemer krijgen we:

$$v = \frac{(x'_2 - x'_1) + u \cdot (t'_2 - t'_1)}{(t'_2 - t'_1) + k \cdot (x'_2 - x'_1)}$$

Als we teller en noemer delen door $t'_2 - t'_1$ krijgen we de te bewijzen formule.

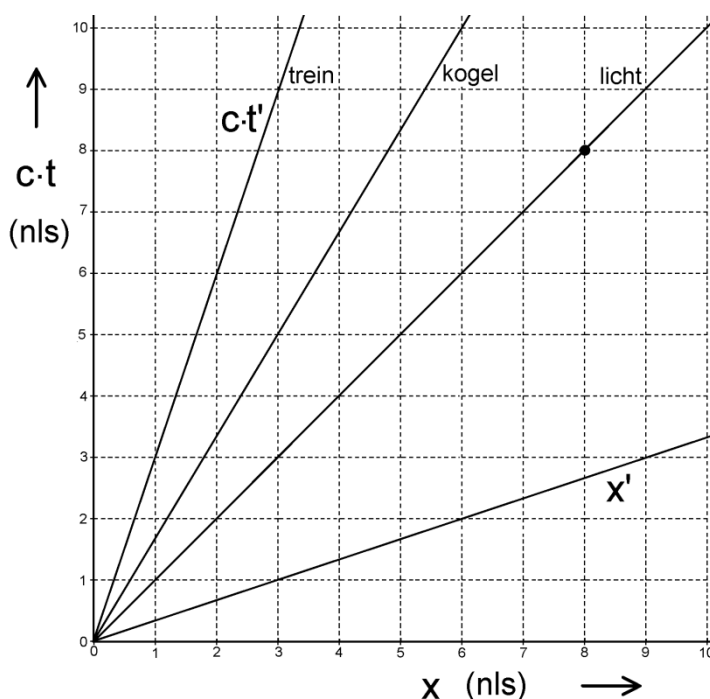
Opgaven bij § 10

Opgave 1

Een raket vliegt met een snelheid van $0,4 \cdot c$ ten opzichte van aarde. De raket vuurt in zijn bewegingsrichting een kogel af met een snelheid van $0,5 \cdot c$. Bereken de snelheid van de kogel ten opzichte van de aarde.

Opgave 2

Een trein rijdt met hoge snelheid over de rails. In de trein wordt een kogel afgeschoten in de bewegingsrichting van de trein. In het minkowskidiagram hiernaast horen de ct -as en x -as bij de waarnemer die naast de rails staat. In dit diagram zijn de wereldlijn van de trein, de kogel en een lichtdeeltje (foton) getekend. De ct' -as en x' -as horen bij het referentiestelsel van de trein.



a.
Bepaal de snelheid u van de trein (uitgedrukt in de lichtsnelheid c) ten opzichte van de waarnemer langs de rails.

b.
Bepaal de snelheid van de kogel v (uitgedrukt in c) ten opzichte van de waarnemer langs de rails.

c.
Bepaal de snelheid v' van de kogel (uitgedrukt in c) ten opzichte van de trein. Ga daarbij uit van de dikke stip op de wereldlijn van het foton.

d.
Controleer de hierboven gevonden waarden met behulp van de formules die in deze paragraaf is behandeld.

Opgave 3

Een raket schiet tegelijkertijd kogel A in voorwaartse richting en kogel B in achterwaartse richting af. Vanuit het gezichtspunt van de raket heeft kogel A een snelheid van $0,7 \cdot c$ en kogel B een snelheid van $0,6 \cdot c$.

Bereken de snelheid van kogel A ten opzichte van kogel B.

Tip: verplaats jezelf in kogel B.

Opgave 4

In de onderstaande figuur zit waarnemer W op zijn stoel en beweegt waarnemer W' in zijn raket met grote snelheid naar rechts. Beide waarnemers zitten in de oorsprong van hun eigen plaatsas. Op het moment dat waarnemer W' waarnemer W passeert, begint voor beiden de tijd te lopen.

Beide waarnemers zien een auto met hoge snelheid hun kant opkomen.



In het volgende minkowskidiagram horen de ct - en x -as bij waarnemer W en de ct' - en x' -as bij waarnemer W'. De wereldlijn van de auto is ook in het diagram getekend.

a.

Bepaal uit het diagram de snelheid u (uitgedrukt in de lichtsnelheid c) van waarnemer W' ten opzichte van waarnemer W.

b.

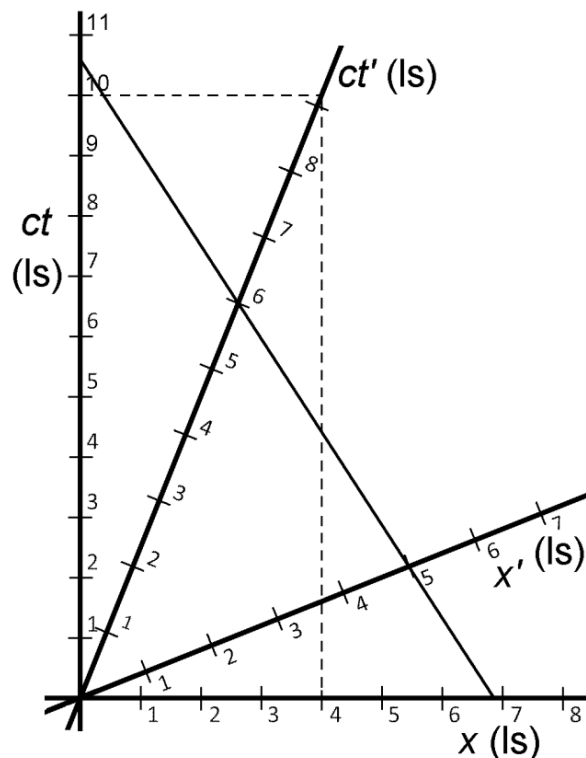
Bepaal uit het diagram de snelheid v' van de auto ten opzichte van waarnemer W' (en let daarbij op het teken).

c.

Bepaal uit het diagram de snelheid v van de auto ten opzichte van waarnemer W.

d.

Ga met een berekening na dat de bij a., b. en c. gevonden snelheden met elkaar in overeenstemming zijn.



Opgave 5

Je vliegt in een raket (= waarnemer W') boven de aarde (= waarnemer W) met 40% van de lichtsnelheid (ten opzichte van het aardoppervlak). Je schiet een kogel in de bewegingsrichting van de raket af. Bereken hoe groot de snelheid van de kogel ten opzichte van de raket moet zijn, zodat deze voor de aarde 80% van de lichtsnelheid is.

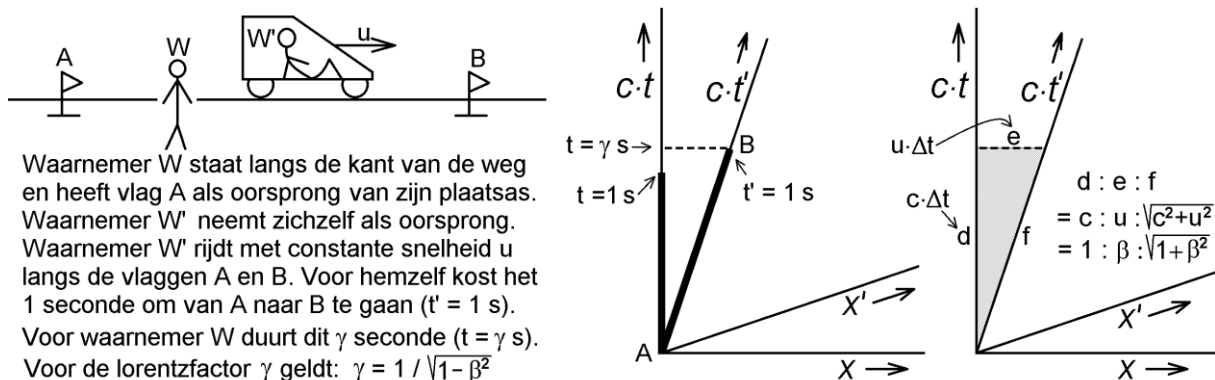
Opgave 6 (valt buiten de lesstof)

Een object dat in de ruimte tussen twee sterrenstelsels vliegt, explodeert in twee gelijke (even zware) delen A en B. Gezien vanuit het oorspronkelijke massamiddelpunt bewegen zowel A als B met een snelheid van $0,5 \cdot c$. Vervolgens exploderen zowel A en B opnieuw in twee gelijke (even zware) delen. Gezien vanuit de oorspronkelijke massamiddelpunten van A en B bewegen deze delen weer met een snelheid van $0,5 \cdot c$. Na de explosies bewegen alle vier de delen langs dezelfde lijn. Bereken de onderlinge snelheid tussen de twee buitenste delen.

Bijlagen

Bewijs voor de formule voor de schaalfactor

De onderstaande figuren spreken bijna voor zich. Links is het gedachtenexperiment beschreven. De middelste figuur geeft het bijbehorende minkowskidiagram. Het schuine dik getekende lijnstuk stelt 1 s voor in het referentiestelsel van waarnemer W' . Het verticale dik getekende lijnstuk stelt 1 s voor in het referentiestelsel van W .



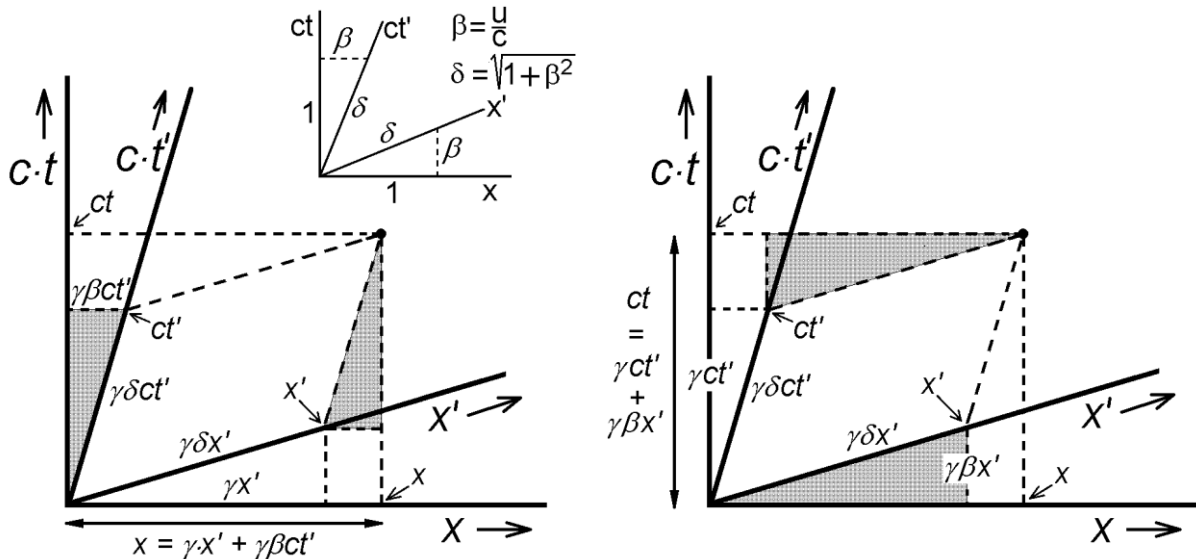
In de middelste figuur is het (dik getekende) schuine lijnstuk langer is dan het verticale (dik getekende) lijnstuk. Daar zijn twee redenen voor. Ten eerste is er de tijdsduurrek die verantwoordelijk is voor de lorentzfactor gamma (γ). Ten tweede geldt dat van een rechthoekige driehoek de schuine zijde altijd langer is dan elke rechthoekszijde. Dit is in de rechter figuur uitgewerkt. De schuine zijde (in de figuur met f aangeduid) is $\sqrt{1 + \beta^2}$ keer langer dan de lange rechthoekszijde (met d aangeduid).

Uiteindelijk is de schaalfactor voor de assen dus gelijk aan:

$$\text{schaalfactor} = \frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Bewijs van de lorentztransformaties

In de onderstaande figuren zijn minkowskidiagrammen afgebeeld. In het kleine bovenste diagrammetje zijn twee rechthoekige driehoeken getekend. De verhouding tussen de lengtes van de drie zijden is aangegeven. Deze verhouding wordt gebruikt bij de twee grote diagrammen.



In de grote diagrammen stelt de stip een gebeurtenis voor. De coördinaten van deze gebeurtenis zijn (x, ct) volgens W en (x', ct') volgens W' . De lengte van het lijnstuk langs de X' -as is gelijk aan $\gamma \cdot \delta \cdot x'$. De factor $\gamma \cdot \delta$ is het gevolg van het feit dat de schaalverdeling langs de X' -as met die factor is uitgerekend ten opzichte van de schaalverdeling langs de X -as. Om dezelfde reden is de lengte van het lijnstuk langs de ct' -as gelijk aan $\gamma \cdot \delta \cdot ct'$.

Met behulp van de figuren kunnen de coördinaten x en ct worden uitgedrukt in x' en ct' . Het resultaat is:

$$x = \gamma \cdot x' + \gamma \cdot \beta \cdot c \cdot t'$$

$$ct = \gamma \cdot c \cdot t' + \gamma \cdot \beta \cdot x'$$

Na wat algebraïsch gemanipuleer volgen hieruit vergelijkingen waarin x' en ct' in x en ct worden uitgedrukt. Het resultaat hiervan is:

$$x' = \gamma \cdot x - \gamma \cdot \beta \cdot c \cdot t$$

$$ct' = \gamma \cdot c \cdot t - \gamma \cdot \beta \cdot x$$

Bewijs dat het ruimtetijdinterval invariant onder de lorentztransformatie is

Voor het ruimtetijdinterval s^2 tussen twee gebeurtenissen A en B geldt:

$$s^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2.$$

Het ruimtetijdinterval verandert niet bij een verschuiving van de oorsprong van de plaatsas (x-as) en/of van de tijdas (ct-as). Zo zullen bijvoorbeeld x_B en x_A veranderen maar het verschil ($x_B - x_A$) gelijk blijven. We maken het ons nu gemakkelijk door de nieuwe oorsprong ter plaatse van gebeurtenis A te kiezen.

Voor het ruimtetijdinterval kunnen we dan schrijven:

$$s^2 = c^2 t_{B,NIEUW}^2 - x_{B,NIEUW}^2$$

Hierin komen alleen de nieuwe coördinaten (dus bij de nieuwe oorsprong) van gebeurtenis B voor. Als we nu kunnen bewijzen dat $s^2 = c^2 t^2 - x^2$ invariant onder de lorentztransformatie is, is $s^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2$ dat ook.

Hier volgt het bewijs.

$$\begin{aligned} (ct)^2 - x^2 &= \\ &= (\gamma \cdot ct' + \gamma \cdot \beta \cdot x')^2 - (\gamma \cdot x' + \gamma \cdot \beta \cdot ct')^2 \\ &= (\gamma \cdot ct')^2 + (\gamma \cdot \beta \cdot x')^2 + 2 \cdot \gamma^2 \cdot \beta \cdot ct' \cdot x' - (\gamma \cdot x')^2 - (\gamma \cdot \beta \cdot ct')^2 - 2 \cdot \gamma^2 \cdot \beta \cdot ct' \cdot x' \\ &= (\gamma \cdot ct')^2 + (\gamma \cdot \beta \cdot x')^2 - (\gamma \cdot x')^2 - (\gamma \cdot \beta \cdot ct')^2 \\ &= (\gamma^2 - \gamma^2 \cdot \beta^2) \cdot (ct')^2 - (\gamma^2 - \gamma^2 \cdot \beta^2) \cdot x'^2 \\ &= (ct')^2 - x'^2 \end{aligned}$$

Hiermee is het bewijs geleverd.